

Artículo publicado en el Repositorio Institucional del IMTA

<i>Título</i>	Resistencia al flujo en canales y límites de aplicabilidad de la fórmula de Manning.
<i>Autor / Adscripción</i>	Álvaro A. Aldama Alfredo R. Ocón Instituto Mexicano de Tecnología del Agua
<i>Publicación</i>	Ingeniería Hidráulica en México, 17(1): 107-115
<i>Fecha de publicación</i>	2002
<i>Resumen</i>	Se revisan los conceptos involucrados en la estimación de la resistencia al flujo en canales. En particular, se señalan los inconvenientes de la popular fórmula de Manning. También se presentan análisis teóricos que permiten determinar expresiones para el factor de fricción de la fórmula de Darcy-Weisbach para canales circulares trabajando llenos o a la mitad, y para canales anchos conduciendo flujo hidráulicamente rugoso con turbulencia desarrollada. Finalmente, se brinda evidencia en el sentido de que la forma geométrica de la sección transversal no tiene un papel importante en la estimación de la resistencia al flujo en canales, quedando bien representada por el radio hidráulico.
<i>Identificador</i>	<a href="http://hdl.handle.net/123456789/752">http://hdl.handle.net/123456789/752</a>

# Resistencia al flujo en canales y límites de aplicabilidad de la fórmula de Manning

Álvaro A. Aldama  
Alfredo R. Ocón

Instituto Mexicano de Tecnología del Agua

*Se revisan los conceptos involucrados en la estimación de la resistencia al flujo en canales. En particular, se señalan los inconvenientes de la popular fórmula de Manning. También se presentan análisis teóricos que permiten determinar expresiones para el factor de fricción de la fórmula de Darcy-Weisbach para canales circulares bajando llenos o a la mitad, y para canales anchos conduciendo flujo hidráulicamente rugoso con turbulencia desarrollada. Se demuestra que los resultados de dichos análisis permiten evitar hacer ajustes en los valores numéricos que aparecen en la fórmula de Colebrook, a fin de reproducir observaciones experimentales. Asimismo, hacen posible explicar la dispersión experimental en los valores de los parámetros que aparecen en una expresión para el cálculo del coeficiente de fricción de la fórmula de Darcy-Weisbach, aplicable a canales anchos. Con base en los resultados presentados se determina el rango de aplicación de la fórmula de Manning. Finalmente, se brinda evidencia en el sentido de que la forma geométrica de la sección transversal no tiene un papel importante en la estimación de la resistencia al flujo en canales, quedando bien representada por el radio hidráulico. Esto permite vislumbrar la posibilidad de desarrollar una fórmula universalmente válida para el factor de fricción de la fórmula de Darcy-Weisbach, aplicable a flujo en canales.*

**Palabras clave:** Resistencia al flujo, canales abiertos, coeficiente de fricción, fórmula de Manning, fórmula de Darcy-Weisbach.

## Introducción

La fórmula de Manning (1895) es quizá la más ampliamente utilizada para estimar la resistencia al flujo en canales. Uno de los principales inconvenientes que exhibe dicha expresión es que no es dimensionalmente homogénea. En efecto, es común que la ecuación de Manning, para evaluar la resistencia al flujo en escurrimiento uniforme en canales abiertos, se escriba como sigue (French, 1985):

$$U = \frac{C_m}{n} R^{2/3} S^{1/2} \quad (1)$$

donde  $U$  representa la velocidad media en la sección transversal;  $C_m$ , un factor de conversión igual a 1 para el sistema internacional de unidades, e igual a 1.486 para el sistema inglés de unidades;  $n$ , el factor de rugosidad (o "fricción") de Manning;  $R$ , el radio hidráulico de la sección transversal, y  $S$ , la pendiente del fondo del canal.

Por otra parte, frecuentemente la resistencia al flujo en tuberías, para escurrimiento permanente y unidirec-

cional, se evalúa por medio de la fórmula de Darcy-Weisbach (véase, por ejemplo, Sotelo, 1974), la cual se puede escribir como sigue:

$$U = \left( \frac{8gRS_f}{f} \right)^{1/2} \quad (2)$$

donde  $g$  representa la aceleración de la gravedad;  $R$ , el radio hidráulico de la sección transversal, que en el caso de un círculo está dado por  $R = D/4$ , siendo  $D$  el diámetro;  $S_f$ , la pendiente de fricción, y  $f$ , un factor de fricción adimensional. Evidentemente, la expresión 2 tiene la enorme ventaja de ser dimensionalmente homogénea. En la práctica, cuando el flujo es turbulento, el factor  $f$  se determina empleando el diagrama de Moody o bien, la representación matemática del mismo a través de la fórmula de Colebrook (Sotelo, 1974):

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left( \frac{2.51}{R_e \sqrt{f}} + \frac{k_s}{3.71D} \right) \quad (3)$$

donde  $k_s$  representa la rugosidad equivalente de Nikuradse y  $R_e \equiv UD/\nu$ , el número de Reynolds, siendo  $\nu$  la viscosidad cinemática del fluido. El origen de la expresión 3 no es totalmente empírico. En efecto, de acuerdo con Schlichting (1979), los errores en los que se incurre al suponer que el perfil logarítmico universal de velocidades es válido para toda la sección transversal de la tubería son despreciables. Entonces, al integrar dicho perfil en la sección circular del conducto, se obtiene la siguiente expresión para flujo hidráulicamente liso:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.035 \log \frac{2.861}{R_e \sqrt{f}} \quad (4)$$

Schlichting (1979) señala que para ajustar mejor los datos experimentales de diversos autores pueden alterarse ligeramente los coeficientes numéricos de la expresión anterior, resultando la fórmula:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \frac{2.51}{R_e \sqrt{f}} \quad (5)$$

En el caso de flujo hidráulicamente rugoso, la integración del correspondiente perfil logarítmico de velocidades en la sección circular del conducto resulta en:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.035 \log \frac{k_s}{3.344D} \quad (6)$$

De nuevo, Schlichting (1979) señala que para lograr un mejor ajuste a los datos experimentales de Nikuradse pueden modificarse ligeramente los coeficientes numéricos de la expresión anterior, de donde resulta la expresión:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \frac{k_s}{3.71D} \quad (7)$$

Colebrook (1939) propuso la ecuación 3 para la transición entre flujo turbulento hidráulicamente liso e hidráulicamente rugoso. Dicha ecuación se comporta asintóticamente como la ecuación 4 para flujo hidráulicamente liso ( $k_s/D \rightarrow 0$ ), y como la ecuación 5 para flujo hidráulicamente rugoso o con turbulencia completamente desarrollada ( $R_e \rightarrow \infty$ ).

Ahora bien, en vista del origen totalmente empírico de la fórmula de Manning y de la inhomogeneidad dimensional de la misma, muchos investigadores (Keulegan, 1938; Zegzhda, 1938; Rouse, 1946; Thijsse, 1949; Sayre y Albertson, 1961; Reinius, 1961, y Graf, 1971, por mencionar sólo algunos) han destinado sus esfuerzos a desarrollar expresiones para el factor de fricción adi-

mensional,  $f$ , que aparece en la fórmula de Darcy-Weisbach, aplicables a flujo en canales (véanse ASCE, 1963; Yen, 1992, y Singh, 1996). Dichos esfuerzos han empleado como base el trabajo teórico seminal de Keulegan (1938), quien llevó a cabo la integración del perfil logarítmico de velocidades para flujo turbulento hidráulicamente rugoso en la sección transversal de un canal muy ancho, a partir de la cual se obtiene una expresión del tipo Colebrook para  $f$ . Las fórmulas de esta clase que están disponibles en la literatura despliegan una dispersión notable en los valores de los coeficientes numéricos propuestos por diversos autores.

Para fines de diseño de canales es común que se suponga que el flujo es hidráulicamente rugoso con turbulencia desarrollada. Por otra parte, es bien sabido que la fórmula de Manning es aplicable precisamente para ese tipo de régimen. Por este motivo, las consideraciones presentadas en este trabajo se circunscriben a flujo hidráulicamente rugoso. En primer término se analiza el caso de flujo en un canal circular completamente lleno, corrigiendo el proceso de integración propuesto por Schlichting (1979), con el objeto de explicar la alteración de los coeficientes numéricos que da lugar a la ecuación 5. Posteriormente, se revisa el trabajo de Keulegan (1938), corrigiendo, asimismo, el proceso de integración empleado por dicho autor para explicar la dispersión observada en los coeficientes numéricos de las fórmulas tipo Colebrook propuestas por diversos autores para flujo uniforme en canales muy anchos. Una vez hecho lo anterior, se demuestra que la fórmula de Manning es un ajuste de potencia a la expresión que verdaderamente describe el comportamiento del factor de fricción de Darcy-Weisbach para canales anchos. Dicho ajuste es razonable para un cierto rango de valores de la rugosidad relativa y se muestra que valores altos del factor de fricción de Manning corresponden a rugosidades sin sentido físico. Finalmente, se analiza la presunción de que la geometría de un canal es relativamente poco importante para efectos de la evaluación de la resistencia al flujo en canales.

### El factor de fricción $f$ en conductos circulares

En flujo unidireccional, turbulento, uniforme, permanente e hidráulicamente rugoso, la subcapa viscosa no existe, y la ley de pared toma la forma de la siguiente distribución logarítmica universal de velocidades (Schlichting, 1979):

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{k_s} + B \quad (8)$$

donde  $u$  representa la velocidad en el sentido longitudinal del flujo ( $x$ );  $\kappa=0.4$ , la constante de von Kármán;  $y$ , la coordenada transversal a la dirección del flujo medida a partir de la pared sólida;  $B = 8.5$ , y  $u_*$ , la velocidad al cortante, definida como:

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \quad (9)$$

donde  $\tau_0$  representa el esfuerzo cortante en la pared y  $\rho$ , la densidad del fluido. Es ampliamente sabido que el esfuerzo cortante de pared está dado por la expresión (Henderson, 1966):

$$\tau_0 = \rho g R S_f \quad (10)$$

Al combinar las ecuaciones 9 y 10 con la fórmula de Darcy-Weisbach (2) se obtiene la conocida relación:

$$\frac{u_*}{U} = \sqrt{\frac{f}{8}} \quad (11)$$

La distribución logarítmica dada por la ecuación 8, válida en el interior de la capa límite, se traslapa asintóticamente con la llamada ley de déficit (o "defecto") de velocidad, que también posee carácter logarítmico (Panton, 1984), la cual aplica en el resto de la región de flujo. Ahora bien, es conocido que el error que se comete al considerar que la ecuación 8 es aplicable fuera de la capa límite, con el propósito de determinar la velocidad media en la sección transversal, es pequeño (Yen, 1992). Con base en este tipo de observación, Schlichting (1979) presenta la integración de la ecuación 8 en la sección transversal de una tubería circular. Para el efecto, es necesario tener presente que la coordenada  $y$  se relaciona con la coordenada radial  $r$  de la siguiente manera:

$$y = \frac{D}{2} - r \quad (12)$$

Sustituyendo la ecuación 12 en la ecuación 8 e integrando en la sección transversal circular, Schlichting (1979) propone calcular la velocidad media como:

$$U = \frac{1}{\pi D^2/4} \int_0^{D/2} u_* \left( \kappa^{-1} \ln \frac{D/2-r}{k_s} + B \right) 2\pi r dr \quad (13)$$

Al combinar el resultado de la integral indicada en la ecuación 13 con la ecuación 11, se obtiene la expresión 6. Como se recordará, para reproducir los datos experimentales de Nikuradse, Schlichting propone modificar ligeramente los coeficientes numéricos presen-

tes en dicha fórmula, para finalmente obtener la siguiente expresión, que es equivalente a la ecuación 7:

$$f = \left( -2.035 \log \frac{k_s}{D} + 1.679 \right)^{-2} \quad (14)$$

Ahora bien, el límite del integrando indicado en la ecuación 13 cuando  $r \rightarrow D/2$  es  $-\infty$ , lo cual proviene del hecho que la ecuación 8 implica que  $\lim_{y \rightarrow 0} u(y) = -\infty$ , que evidentemente es físicamente inviable. De hecho, la ecuación 8 no es válida para  $y=0$  ( $r=D/2$ ) y tomar los límites de integración en la ecuación 13 como  $r=0$  a  $r=D/2$  produce una contribución negativa al cálculo de la velocidad media  $U$ . Esto demuestra que es erróneo calcular  $U$  integrando el perfil logarítmico de velocidades tomando como límite superior a  $r=D/2$ .

En estricto sentido, la ecuación 8 es válida a partir del valor  $y=\alpha k_s$ , que corresponde a  $u=0$ , esto es  $\alpha=0.033373269 k_s \cong k_s/30$ , que implica que  $\alpha=0.033373269$ . Por lo anterior, en este trabajo se propone que la velocidad media  $U$  en la sección transversal circular se calcule como sigue:

$$U = \frac{1}{\pi(D/2 - \alpha k_s)^2} \int_0^{D/2 - \alpha k_s} u_* \left( \kappa^{-1} \ln \frac{D/2-r}{k_s} + B \right) 2\pi r dr \quad (15)$$

Al comparar las ecuaciones 13 y 15 se observa que no sólo se modifica el límite superior de integración, sino también el área a través de la cual se mueve el fluido. Al resolver la integral indicada en la ecuación 15 y combinar el resultado con la ecuación 11, se llega a la expresión:

$$f = \left[ -2.035 \left( \frac{1 + 1.998\alpha k_s/D}{1 - 2\alpha k_s/D} \right) \log \frac{k_s}{D(1 - 2\alpha k_s/D)} + 1.679 \left( \frac{1 + 3.054\alpha k_s/D}{1 - 2\alpha k_s/D} \right) \right]^{-2} \quad (16)$$

Como es de esperarse, las ecuaciones 14 y 16 coinciden cuando  $\alpha=0$ . En la ilustración 1 se muestra la comparación de los resultados producidos por la ecuación 7, cuyos coeficientes fueron modificados empíricamente para ajustar datos experimentales y los que corresponden a la ecuación 16 recién obtenida. Como puede observarse, las gráficas prácticamente se traslapan en el rango  $k_s/D \in [0.0002, 0.05]$ , que es equivalente al rango  $k_s/R \in [0.0008, 0.2]$ , correspondiente al presentado en el diagrama de Moody (Sotelo, 1974). Este resultado muestra que no hay necesidad de ajustar empíricamente los coeficientes de la fórmu-

la para calcular el factor de fricción  $f$ , siempre y cuando se emplee el rango espacial sobre el cual puede suponerse válido el perfil logarítmico de velocidades y, por tanto, se use la ecuación 16.

Debe hacerse hincapié en que los resultados presentados en esta sección son válidos para conductos circulares trabajando a presión o canales circulares llenos en los que el escurrimiento es uniforme. En este caso, se tiene la igualdad entre la pendiente de fricción,  $S_f$  y la pendiente del fondo del canal,  $S$ . Asimismo, es sencillo demostrar que los mismos resultados también aplican a canales circulares que conducen escurrimiento uniforme con relación de llenado igual a  $1/2$ , esto es, con un tirante igual a la mitad del diámetro de la sección transversal.

### El factor de fricción $f$ para canales rectangulares anchos

Los resultados mostrados en la sección anterior nos permiten ahora abordar el caso de canales rectangulares anchos. Según se mencionó anteriormente, Keulegan (1938) supuso que el perfil logarítmico universal de velocidades para flujo turbulento hidráulicamente rugoso (8), es aplicable para toda la sección transversal de un canal ancho. Como ya se mencionó anteriormente, esa hipótesis resulta muy razonable (Schlichting, 1979; Yen, 1992). Entonces, el citado autor estableció una fórmula para el factor de fricción,  $f$ , integrando la ecuación 8 para determinar la velocidad media en el canal como sigue:

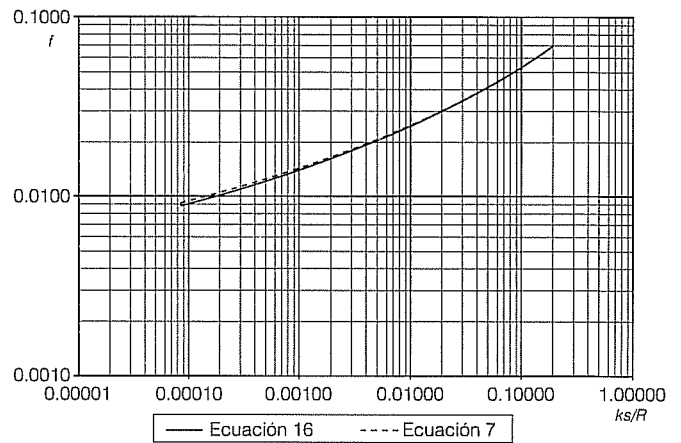
$$U = \frac{1}{h} \int_0^h u \left( \kappa^{-1} \ln \frac{y}{k_s} + B \right) dy \quad (17)$$

donde  $h$  representa el tirante. Al combinar el resultado de la integración indicada en la ecuación 17 con la expresión 11, Keulegan obtuvo:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -a \log \frac{k_s}{bh} \quad (18)$$

donde  $a=2.03$  y  $b=11.09$ . Es interesante notar que diversos autores han comprobado experimentalmente que la ecuación 18 reproduce observaciones, modificando los valores numéricos de los parámetros  $a$  y  $b$  que aparecen en ella. En efecto, los siguientes valores para dichos parámetros han sido reportados en la literatura para el caso de canales anchos:  $a=2.03$ ,  $b=11.55$  (Zegzhda, 1938);  $a=2.03$ ,  $b=12.2$  (Thijssse, 1949);  $a=2.0$ ,  $b=12.4$  (Reinius, 1961), y  $a=2.0$ ,  $b=12.9$  (Graf, 1971). Como puede observarse, el valor de  $a$  se mantiene prácticamente constante, mientras que se tiene

Ilustración 1. Comparación de valores de  $f$  obtenidos con las ecuaciones 16 y 7.



una dispersión de valores para  $b$ , que varía entre 11.09 (el valor teórico encontrado por Keulegan) y 12.9 (el valor empírico señalado por Graf). A continuación se presenta un análisis similar al desarrollado por Keulegan (1938), con una ligera, pero importante modificación que puede explicar la dispersión observada en los valores de  $b$  determinados empíricamente.

En forma análoga a lo expuesto para el caso de conductos circulares, se puede afirmar que es erróneo emplear el límite inferior  $y=0$  para integrar el perfil logarítmico de velocidades (8), ya que  $\lim_{y \rightarrow 0} u(y) = -\infty$ , lo cual no es físicamente factible y produce una contribución negativa en el cálculo de  $\int_0^h u(y) dy$  para la determinación de  $U$ . En vista de lo anterior, los autores proponen la siguiente definición de velocidad media para canales anchos en los que la distribución de velocidades está dada por la ecuación 8:

$$U = \frac{1}{(h - \alpha k_s)} \int_{\alpha k_s}^h u \left( \kappa^{-1} \ln \frac{y}{k_s} + B \right) dy \quad (19)$$

donde, de nuevo,  $\alpha=0.033373269$ . En forma análoga a lo realizado en el caso de conductos circulares, en la definición de la velocidad media en canales anchos a través de la ecuación 19, se modifica no solamente el límite inferior de integración, sino también el área unitaria a través de la cual fluye el líquido. Llevando a cabo la integración indicada en la ecuación 19 se obtiene el siguiente resultado:

$$U = \left[ B - \frac{1}{\kappa(1 - \alpha k_s/h)} \left( \ln \frac{k_s}{h} + \alpha \frac{k_s}{h} \ln \alpha \right) - \frac{1}{\kappa} \right] u. \quad (20)$$

Combinando la ecuación 20 con la ecuación 11, sustituyendo en ésta  $f_t$  por  $f$ , se llega a la siguiente expresión para el factor de fricción teórico,  $f_t$ :

$$\frac{1}{\sqrt{f_t}} = -\frac{\tilde{a}}{(1-\alpha k_s/h)} [\log(k_s/h) - \tilde{c}(k_s/h)] + \tilde{d} \quad (21)$$

donde  $\tilde{a}=2.035216917$ ,  $\tilde{c}=0.049279011$  y  $\tilde{d}=2.121320344$ . Puede parecer innecesario escribir los valores de los parámetros  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{c}$  y  $\tilde{d}$  con tantas cifras significativas, pero, como se mostrará posteriormente, esto es un requisito para explicar la dispersión de valores experimentales en el valor del parámetro  $b$  que aparece en la ecuación 18. Tomando en cuenta los resultados presentados en la sección concerniente a conductos circulares, en el sentido de que la expresión derivada teóricamente para el factor de fricción reproduce observaciones (véase ilustración 1), supóngase que la expresión 21 sea correcta en la descripción de la resistencia al flujo en canales anchos. Con el objeto de comparar los valores del factor de fricción producidos por las ecuaciones 18 y 21, conviene escribir éstas como sigue:

$$f = [-a \log(k_s/h) + a \log b]^{-2} \quad (22)$$

$$f_t = \left\{ -\frac{\tilde{a}}{(1-\alpha k_s/h)} [\log(k_s/h) - \tilde{c}(k_s/h)] + \tilde{d} \right\}^{-2} \quad (23)$$

$$\equiv [-a \log(k_s/h) + a \log b + \tilde{e}]^{-2}$$

donde  $\tilde{e} = -[\tilde{a}(1-\alpha k_s/h)^{-1} - a] \log(k_s/h) + (\tilde{d} - a \log b) - \tilde{c}(k_s/h)(1-\alpha k_s/h)^{-1}$ . Ahora es posible explicar teóricamente la dispersión de valores reportados para el parámetro  $b$ . Al comparar las ecuaciones 22 y 23, es evidente que estas coincidirán siempre y cuando  $\tilde{e} = \tilde{e}(k_s/h) = 0$ , lo cual se cumplirá para un determinado valor de  $k_s/h$ . Así, para:  $a=2.03$ ,  $b=11.55$  (Zegzhda, 1938), se obtiene  $k_s/h=1.4 \times 10^{-7}$ ; para  $a=2.03$ ,  $b=12.2$  (Thijssse, 1949),  $k_s/h=8 \times 10^{-17}$ ; para  $a=2.0$ ,  $b=12.4$  (Reinius, 1961),  $k_s/h=0.018$ , y para  $a=2.0$ ,  $b=12.9$  (Graf, 1971),  $k_s/h=0.0015$ . Estos resultados indican que diferentes rangos de valores para la rugosidad relativa,  $k_s/h$ , empleados en la determinación empírica de  $a$  y  $b$  (véase ecuación 18), pueden explicar la dispersión observada en los valores reportados de  $b$ .

### Límites de aplicabilidad de la fórmula de Manning

Una forma de emplear la fórmula de Manning, ecuación 1, con  $C_m=1$ , independientemente del sistema de unidades que se utilice, es considerar que el factor

de rugosidad ( $n$ ), tiene como dimensiones  $[TL^{-1/3}]$ . A partir de este momento se supondrá que se ha optado por esta alternativa. Por otro lado, como ya se mencionó anteriormente, en flujo uniforme en canales,  $S_f = S$ . Empleando esta expresión y eliminando  $U$  de las ecuaciones 1 y 2, se obtiene la siguiente fórmula, que relaciona al factor de rugosidad ( $n$ ), con el factor de fricción adimensional ( $f$ ):

$$n = (f/8g)^{1/2} R^{1/6} \quad (24)$$

Strickler (1923) encontró empíricamente que en un fondo plano constituido por granos de arena, la rugosidad  $n$  es proporcional al diámetro de éstos elevado a la potencia 1/6. Este resultado y la forma de la ecuación 24 sugieren plantear una expresión del tipo siguiente:

$$n = K_m g^{-1/2} k_s^{1/6} \quad (25)$$

donde  $K_m$  es una constante adimensional. Sustituyendo esta ecuación en la ecuación 24, haciendo uso del hecho que para canales anchos  $R = h$ , y despejando a  $f$ , se obtiene:

$$f = 8K_m^2 (k_s/h)^{1/3} \quad (26)$$

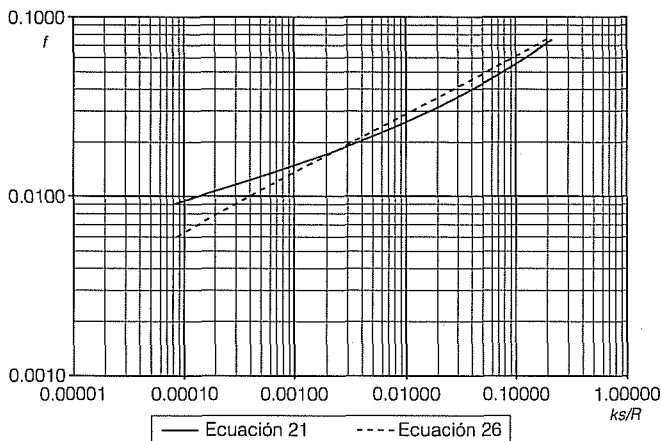
Es evidente que las ecuaciones 21 y 26 no exhiben la misma forma funcional, por lo que la ecuación 26, que es una forma de expresar la fórmula de Manning, se puede considerar como un ajuste de potencia a la ecuación 21, la cual, como se ha explicado, posee base teórica. Williamson (1951) y Henderson (1966) presentaron un enfoque de este tipo, pero empleando datos experimentales. Utilizando una transformación logarítmica en la ecuación 26 y un algoritmo de mínimos cuadrados para ajustarla a los datos producidos por la ecuación 21, se ha obtenido el resultado  $K_m=0.129765776$  para el rango  $k_s/h \in [0.0002, 0.2]$ , que coincide con el presentado por Henderson (1966). El ajuste correspondiente se muestra en la ilustración 2.

Según se había sugerido anteriormente, al citar el trabajo de Strickler (1923), es común que el factor de rugosidad de Manning se exprese como sigue:

$$n = \beta k_s^{1/6} \quad (27)$$

Para  $k_s$  medida en m, Meyer-Peter y Müller sugieren usar  $\beta=0.038$ , Strickler recomienda el valor  $\beta=0.04739$  y, finalmente, Lane propone  $\beta=0.04729$  (véase, por ejemplo, Simons y Sentürk, 1992). Empleando el valor encontrado anteriormente para  $K_m$ , y aplicando la ecuación 25, se obtiene  $\beta=0.04143$ , que es del mismo orden de magnitud que los valores anteriormente cita-

Ilustración 2. Ajuste de potencia para el factor  $f$  ( $R = h$ ).



dos. Esto proporciona evidencia empírica adicional sobre el procedimiento seguido para estimar  $K_m$ .

El resultado obtenido para  $K_m$  permite llevar a cabo algunas observaciones sobre la aplicabilidad de la fórmula de Manning. De la ecuación 25 se obtiene:

$$k_s = K_m^{-6} g^3 n^6 \quad (28)$$

Por otra parte, los valores recomendados por Chow (1959) para la rugosidad  $n$  para canales con sección muy irregular con curvas y vegetación varían de 0.050 a 0.150. Cuando se emplea el valor calculado de  $K_m$  en la ecuación 28, se obtiene como resultado un rango de valores para  $k_s$  entre ¡3 y 2,296 metros! Evidentemente, estos valores para la rugosidad equivalente de Nikuradse carecen totalmente de sentido físico. Por esta razón, se puede concluir que para canales anchos, la fórmula de Manning es válida únicamente para el rango  $k_s/h \in [0.0002, 0.2]$ , fuera del cual, el ajuste de potencia representado por la ecuación 26 se separa considerablemente de los valores correspondientes a la ecuación 21. Evidentemente, valores tan altos como los citados para  $n$  incorporan efectos que nada tienen que ver con la resistencia al flujo por efecto del esfuerzo cortante en la pared. Más bien, representan el efecto integrado de cambios en la geometría del canal, generación interna de turbulencia por efecto de obstáculos y vegetación en el flujo, efectos centrífugos y centrípetas asociados con la curvatura de las trayectorias fluidas, etc. Todos estos efectos no son representables, estrictamente hablando, mediante una fórmula de resistencia al flujo. Es necesario desarrollar investigación para determinar las formas más convenientes de parametrizarlos.

Cuadro 1. Límites de aplicabilidad de la fórmula de Manning.

$R$ en m	$n_{\min}$	$n_{\max}$
0.1	0.000006	0.006
0.5	0.000007	0.007
1.0	0.000008	0.008
2.0	0.000009	0.009
4.0	0.000010	0.010
5.0	0.000011	0.011
10.0	0.000012	0.012

Por otra parte, también es conveniente establecer el rango de valores del factor de rugosidad  $n$ , que corresponde al rango de rugosidades relativas  $k_s/R \in [0.0002, 0.2]$  (donde se ha sustituido el radio hidráulico por el tirante) para el que se ha determinado la validez de la fórmula de Manning. Para el efecto, rescribese la ecuación 25 como sigue:

$$n = K_m g^{-1/2} (k_s/R)^{1/6} R^{1/6} \quad (29)$$

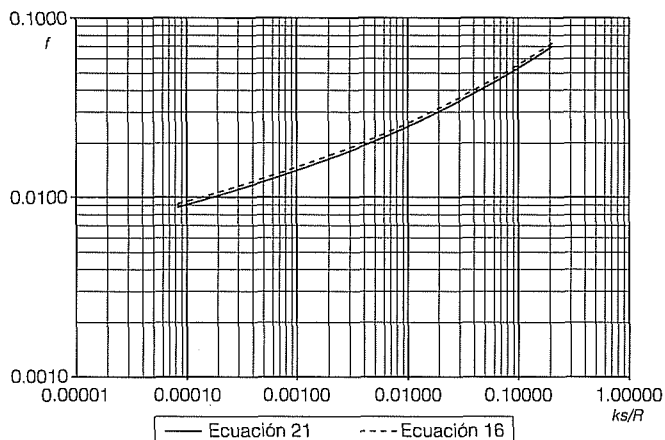
Empleando entonces como valor mínimo de  $k_s/R$ , 0.00002, y como valor máximo, 0.2, se obtienen los valores mínimo y máximo de  $n$  mostrados en el cuadro 1 para la aplicabilidad de la fórmula de Manning, usando la ecuación 29 y diversos valores para  $R$ .

Como puede observarse en el cuadro 1, los valores máximos admisibles para el factor de rugosidad de Manning, para una amplia gama de valores del radio hidráulico, son relativamente bajos, correspondiendo a superficies relativamente lisas, aun para  $R=10$  m, para el que el valor máximo de  $n$  se asocia, por ejemplo, con concreto bien terminado (Chow, 1959).

### Influencia de la geometría en el comportamiento del factor de fricción $f$

En un estudio realizado por un grupo de trabajo sobre factores de fricción en canales para el Comité de Hidromecánica de la División de Hidráulica de la Sociedad Americana de Ingenieros Civiles (ASCE, 1963) se afirma la existencia de cierta información empírica que sugiere que los valores factores de fricción  $f$  de la fórmula de Darcy-Weisbach (ecuación 2), podrían ser relativamente insensibles a la forma geométrica de la sección transversal del canal, siendo el radio hidráulico la única característica geométrica que tendría un papel importante en la estimación de la resistencia al flujo en canales. No obstante lo anterior, el estudio citado no ofrece evidencia concreta en ese sentido. Dado que tanto la ecuación 16 para conductos circu-

**Ilustración 3. Comparación de valores de  $f$  correspondientes a un conducto circular funcionando lleno o a la mitad (ecuación 16) y a un canal ancho (ecuación 21).**



lares fluyendo llenos o a la mitad, como la ecuación 21 para canales anchos poseen base teórica, es posible comparar sus valores, haciendo  $D = 4R$  en el primer caso y  $h = R$  en el segundo. El resultado de dicha comparación se muestra en la ilustración 3 para el rango  $k_s/R \in [0.0008, 0.2]$  que, como se mencionó anteriormente, coincide con el presentado por el diagrama de Moody. Como puede observarse, las gráficas para el factor de fricción  $f$  correspondientes a conductos circulares trabajando llenos o a la mitad, y a canales anchos producen valores que prácticamente coinciden, con diferencias que no exceden el 5%. Esto brinda mayor peso a la conjetura de que la geometría del canal no tiene un papel importante en la estimación del factor de fricción, más que a través del radio hidráulico. Asimismo, sugiere la posibilidad del desarrollo de una fórmula universal para el factor  $f$  que represente adecuadamente su dependencia con respecto a la rugosidad relativa,  $k_s/R$ , independientemente de la forma de la sección transversal. Para el efecto, sería muy recomendable extender el estudio aquí presentado a otras secciones transversales de uso común en la práctica (por ejemplo, trapeciales o secciones compuestas) e incluso investigar lo que puede suceder en secciones irregulares como las que frecuentemente ocurren en cauces naturales. Evidentemente en esos casos no sería posible determinar la dependencia funcional del factor  $f$  con respecto a la rugosidad relativa  $k_s/R$  en forma analítica, sino que sería necesario recurrir a la simulación numérica mediante el uso de algún modelo de turbulencia.

Ahora bien, una variación del 5%, como la que se citó en el párrafo anterior, en el factor de fricción  $f$  produce una variación de la misma magnitud en la pen-

diente de fricción  $S_f$ , ya que éstos son linealmente proporcionales en la fórmula de Darcy-Weisbach (2). Por otra parte, la fórmula de Manning puede producir variaciones que son varios órdenes de magnitud mayores en la estimación de la pendiente de fricción. En efecto, Burham y Davis (1990) describen una encuesta en la que se pidió a ochenta ingenieros hidráulicos experimentados del Cuerpo de Ingenieros del Ejército Americano que estimaran valores para el factor de rugosidad  $n$  de Manning, en diez corrientes naturales muy diferentes entre sí. Para el efecto, se les proporcionó una fotografía de la corriente, así como una copia de los valores recomendados por Chow (1959). En forma por demás interesante, las variaciones en los valores de  $n$  fueron del 300 al 1,000%. Dado que la pendiente de fricción en la fórmula de Manning es directamente proporcional a  $n^2$ , las variaciones correspondientes en  $S_f$  serían del 900 al 100,000%. Esto muestra la gran conveniencia de sustituir la fórmula de Manning por una expresión alternativa que posea base teórica, como las presentadas en este trabajo.

## Conclusiones

La fórmula de Manning es la expresión más comúnmente utilizada para estimar la resistencia al flujo en canales, pero tiene los significativos inconvenientes de tener un origen totalmente empírico y de no poseer homogeneidad dimensional. En contraste con esta situación, la fórmula de Darcy-Weisbach es dimensionalmente homogénea y es posible desarrollar expresiones con base teórica para el factor de fricción  $f$  que aparece en ella. En este trabajo se revisan los procedimientos empleados por diversos investigadores para determinar relaciones funcionales que expresen a  $f$  en términos de la rugosidad relativa para flujo hidráulicamente rugoso con turbulencia desarrollada. En particular, se modifica el análisis presentado por Schlichting (1979) y se demuestra que al cambiar los límites de integración para calcular la velocidad media en conductos circulares, se obtiene una expresión teórica que se ajusta muy bien a la información experimental. En forma similar, se introduce una modificación al análisis clásico de Keulegan (1938), que permite explicar la dispersión en los valores experimentales observados por diversos autores en los parámetros que están presentes en la expresión para el coeficiente de fricción de la fórmula de Darcy-Weisbach,  $f$ , para canales anchos. Este análisis ha permitido, además, comprobar que la fórmula de Manning representa un ajuste de potencia a la citada expresión para  $f$ . Con base en este resultado, se ha demostrado que valores relativamente altos de la rugosidad de Manning,  $n$ , equivalen a valo-



res físicamente inviables de la rugosidad equivalente de Nikuradse. Esta conclusión pone de manifiesto la aplicabilidad de la fórmula de Manning sólo para un rango determinado de valores de la rugosidad relativa. En realidad, lo que ocurre es que valores altos de  $n$  no representan procesos de resistencia al flujo en la capa límite, sino que capturan efectos asociados con cambios de geometría y de dirección del flujo, los cuales no necesariamente pueden representarse adecuadamente a través de una fórmula de tipo Manning. Se requiere abundar en investigaciones que permitan desarrollar parametrizaciones apropiadas de dichos efectos. Asimismo, se brinda evidencia adicional en el sentido de que la forma geométrica de la sección transversal de un canal no tiene un papel importante en la estimación de la resistencia al flujo en canales, quedando bien representada a través del radio hidráulico. Esto proporciona confianza en el sentido de que sería factible desarrollar una fórmula para el factor de fricción  $f$  que sería universalmente válida para cualquier sección transversal. Esto permitiría sustituir a la fórmula de Manning para la estimación de la resistencia al flujo en canales, ya que la dificultad de estimar valores precisos para el factor  $n$  que aparece en dicha expresión puede ocasionar variaciones muy significativas en la pendiente de fricción.

## Reconocimientos

Se agradecen cumplidamente las observaciones y sugerencias de los árbitros que revisaron el manuscrito de este artículo, las cuales, sin lugar a dudas, contribuyeron a enriquecerlo.

Recibido: 03/07/2001  
Aprobado: 17/11/2001

## Referencias

- ASCE Task Force of Hydromechanics Committee, "Friction Factors in Open Channels", *Journal Hydraulics Division*, ASCE, vol. 89, 1963, pp. 97-143.
- Burham, M.W. y D.W. Davis, "Effects of Data Errors on Computed Steady-Flow Profiles", *J. of Hydraulic Engineering*, ASCE, vol. 116, 1990, pp. 9145-929.
- Chow, V.T., *Open Channel Hydraulics*, McGraw-Hill, Nueva York, 1959.
- French, R.H., *Open Channel Hydraulics*, McGraw-Hill, Nueva York, 1985.
- Graf, W.H., *Hydraulics of Sediment Transport*, McGraw-Hill, Nueva York, 1971.
- Henderson, F.M., *Open Channel Flow*, Macmillan, Nueva York, 1966.
- Keulegan, G.H., "Laws of Turbulent Flow in Open Channels", *J. National Bureau of Standards*, vol. 21, 1938, pp. 707-741.
- Manning, R., "On the Flow of Water in Open Channels and Pipes", *Transactions*, Institution of Civil Engineers of Ireland, vol. 24, 1895, pp. 179-207.
- Panton, R.L., *Incompressible Flow*, Wiley-Interscience, Nueva York, 1984.
- Reinius, E., "Steady Uniform Flow in Open Channels", *Bulletin*, vol. 60, Div. Hidráulica, Instituto Real de Tecnología, Estocolmo, Suecia, 1961.
- Rouse, H., *Elementary Mechanics of Fluids*, John Wiley and Sons, Nueva York, 1946.
- Sayre, W.W. y M.L. Albertson, "Roughness Spacing in Rigid Open Channels", *Journal Hydraulic Division*, ASCE, vol. 87, 1961, pp. 121-150.
- Schlichting, H., *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill, Nueva York, 1979.
- Simons D.B. y F. Sentürk, *Sediment Transport Technology*, Water Res. Publ., Fort Collins, Colorado, 1992.
- Singh, V.P., *Kinematic Wave Modeling in Water Resources-Surface Water Hydrology*, John Wiley and Sons, Nueva York, 1996.
- Sotelo, G., *Hidráulica general*, Limusa, México, 1974.
- Strickler, A., "Beitrage zur frage der geschwindigkeitsformel und der rauhgigkeitszahlen fur strome, kanale un geshlossene leitungen", *Mitteilungen des Eidgenossincshen Amtes fur Wasserwirtschaft*, vol. 16, Berna, Suiza, 1923.
- Thijsse, J.T., *Formulae for the Friction Head Loss Along Conduit Walls Under Turbulent Flow*, *Proceedings*, III Congreso de la IAHR, Grenoble, Francia, vol. III, núm. 4, 1949, pp. 1-11.
- Williamson, J., "The Laws of Flow in Rough Pipes", *La Houille Blanche*, vol. 6, 1951, p. 738.
- Yen, B.Ch., "Hydraulic Resistance in Open Channels", *Channel Flow Resistance: Centennial of Manning's Formula*, Water Res. Publ., Littleton, 1992.
- Zegzhda, A.P., *Teoriia podobiiaei metodika rascheta gidrotekhnicheskikh modelei*, Gosstroiidzdat, 1938.

#### Abstract

Aldama, A.A. & A.R. Ocón, "Flow Resistance in Open Channels and Limits of Applicability of Manning's Formula", *Hydraulic Engineering in Mexico (in Spanish)*, vol. XVII, num. 1, pages 107-115, January-March, 2002.

The concepts involved in the estimation of flow resistance in open channels are reviewed. In particular, the drawbacks of the popular Manning formula are identified. Theoretical analyses that allow the derivation of expressions for the friction factor that appears in Darcy-Weisbach's formula for circular channels flowing full or at a depth equal half the diameter, and for wide channels, conveying hydraulically rough, fully turbulent flow. The results of such analyses show that it is possible to avoid adjustments to the numerical values that appear in Colebrook's formula, in order to reproduce experimental data. They also make it possible to explain the empirical dispersion observed in the values of the parameters of an expression used to estimate the Darcy-Weisbach friction coefficient for wide channels. On the basis of these results, the range of validity for Manning's formula is determined. Finally, additional evidence is provided in the sense that the geometrical form of the cross section of the channel does not play an important role in the estimation of flow resistance in open channels, being well represented by the hydraulic radius alone. This observation allows to foresee the possibility of developing a universally valid formula for the Darcy-Weisbach friction factor, applicable to flow in open channels.

**Key words:** flow resistance, open channel flow, friction coefficient, Manning's formula, Darcy-Weisbach's formula.

#### Dirección institucional de los autores:

Álvaro A. Aldama  
Alfredo R. Ocón

Instituto Mexicano de Tecnología del Agua  
Paseo Cuauhnáhuac 8532, Progreso, Jiutepec  
Morelos, México.  
C.P. 62550  
Correo electrónico: aaldama@tlaloc.imta.mx