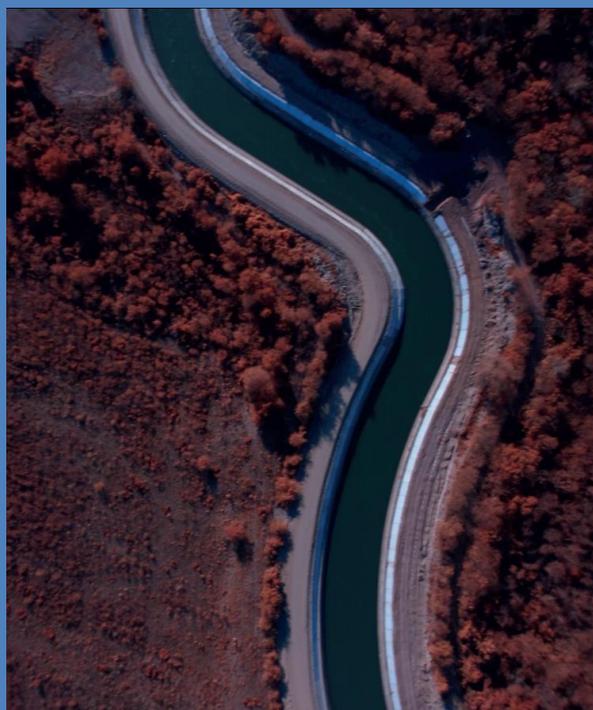


**Instituto Mexicano de Tecnología del Agua**  
**Coordinación de Riego y Drenaje**



**Hidráulica de canales**  
**Principios básicos**

Nahún Hamed García Villanueva

---

IMTA  
Coordinación de Riego y Drenaje

**Hidráulica de canales**  
**Principios básicos**

Nahún Hamed García Villanueva

México 2016

---

627.042      García Villanueva, Nahún Hamed

G53            *Hidráulica de canales. Principios básicos* / Nahún Hamed García Villanueva. - - Jiutepec, Mor. : Instituto Mexicano de Tecnología del Agua © 2016.

135 pp.

ISBN 978-607-9368-77-7

1. Hidráulica 2. Canales 3. Flujo a superficie libre

---

Autor:

Nahún Hamed García Villanueva

Responsable de la edición:

Rebeca Gerardo Tavira

Coordinación editorial:

Fátima Sánchez Bonilla

D.R. © Instituto Mexicano de Tecnología del Agua

Paseo Cuauhnáhuac 8532

62550 Progreso, Jiutepec, Morelos

México

[www.gob.mx/imta](http://www.gob.mx/imta)

ISBN 978-607-9368-77-7

Prohibida su reproducción parcial o total por cualquier medio mecánico, electrónico, de fotocopias, térmico u otros, sin permiso del autor

Impreso en México – Printed in Mexico

## PRÓLOGO

En el cuerpo de este documento, cuya finalidad es apoyar la formación académica en el campo de la ingeniería hidráulica, se analizan los fundamentos físico-matemáticos que dan origen a las ecuaciones que representan el flujo en canales. La discusión se sustenta en la aplicación de las leyes fundamentales de la física newtoniana sobre un volumen de control inmerso en el seno de un fluido con una superficie libre, es decir, con una de sus fronteras expuesta a la presión atmosférica.

Para caracterizar el comportamiento del flujo se adopta el concepto de conservación y balance de una propiedad intensiva sobre un sistema en coordenadas naturales. Bajo este marco de referencia el estudio parte de la obtención de las ecuaciones generales de conservación de masa y de cantidad de movimiento para un flujo tridimensional y posteriormente, aludiendo a una serie de hipótesis simplificadoras, se procede a la derivación de las mismas para el flujo unidimensional aplicable a canales. Durante el desarrollo analítico que conduce a la deducción de las ecuaciones unidimensionales, tanto en su forma integral como diferencial, se obtienen y discuten una serie de resultados y conclusiones de interés, tales como una expresión general para cuantificar la presión hidrostática en un flujo cuya trayectoria describe una curva en el espacio tridimensional de un observador ubicado en un sistema de coordenadas fijo; la transformación algebraica para obtener las ecuaciones de Euler al pasar de un sistema de coordenadas naturales a un sistema de coordenadas rectangulares.

También se introduce en las ecuaciones unidimensionales el efecto de la aceleración radial originada por el grado de curvatura que presenta la trayectoria del flujo; al simplificar estas ecuaciones para su aplicación a un flujo permanente espacialmente variado, se demuestra que cuando la aportación o extracción de gasto se realiza perpendicularmente a la dirección del flujo, resulta una ecuación única para ambas condiciones cuya diferencia radica en el signo positivo o negativo del término que cuantifica el ingreso o extracción de masa. Ante discontinuidades de las variables físicas que bajo ciertas condiciones se presentan dentro del flujo en canales, como es el caso del salto hidráulico y la aparición de ondas cruzadas, se discuten y presentan las versiones diferenciales conservativa y no conservativa de las ecuaciones fundamentales. De manera especial se trata el flujo superficial que escurre de forma temporal o intermitente y durante el cual se presenta, por efecto del desplazamiento de sus fronteras, un crecimiento y decrecimiento de la región que lo contiene.

Para simular de manera correcta esta situación se introduce y adopta el concepto de malla adaptativa, el cual consiste en adimensionalizar espacialmente las ecuaciones de Saint-Venant para acortar numéricamente la dimensión de la región de flujo superficial dentro de una longitud unitaria en el espacio transformado adimensional, es decir, dentro de una región transformada que permanece constante, independientemente del crecimiento o decrecimiento espacial que a través del tiempo sufre la región real del flujo. De aquí que la escala adimensional permita plantear modelos de solución discreta sobre una malla con un número de nudos que permanece constante durante la simulación de una avenida, del riego intermitente u de otro fenómeno con fronteras que se desplazan a través del tiempo.

En resumen, el enfoque que se presenta permite estudiar los principios básicos del flujo en canales desde lo general a lo particular. Al trabajar sobre coordenadas naturales e introducir el concepto de conservación de una propiedad intensiva dentro de un volumen de control, se simplifica la deducción de las ecuaciones que describen los diferentes fenómenos físicos que se presentan en la práctica asociada con la hidráulica de canales, como flujo transitorio, flujo espacialmente variado, flujo gradualmente variado, salto hidráulico, flujo en régimen crítico, flujo con curvatura, flujo en transiciones y el flujo uniforme, entre otros.

Dr. Felipe I. Arreguín Cortés

Director General del Instituto Mexicano de Tecnología del Agua



# ÍNDICE DE CONTENIDO

<b>CAPÍTULO 1</b> .....	<b>3</b>
<b>CINEMÁTICA DE UNA PARTÍCULA</b> .....	<b>3</b>
1.1 SISTEMA DE COORDENADAS NATURALES .....	3
1.2 ACELERACIÓN DE UNA PARTÍCULA .....	7
1.3 FORMAS ADICIONALES PARA EVALUAR LA CURVATURA .....	11
<b>CAPÍTULO 2</b> .....	<b>15</b>
<b>DISTRIBUCIÓN HIDROSTÁTICA DE PRESIONES</b> .....	<b>15</b>
2.1 DISTRIBUCIÓN DE PRESIONES EN UN LÍQUIDO EN REPOSO .....	17
2.2 EQUILIBRIO RELATIVO DEBIDO A UNA ACELERACIÓN LINEAL UNIFORME .....	19
2.3 EQUILIBRIO RELATIVO DEBIDO A ROTACIÓN UNIFORME DEL LÍQUIDO RESPECTO A UN EJE VERTICAL .....	22
2.4 DISTRIBUCIÓN DE PRESIONES SOBRE UN CANAL DE PENDIENTE CONSTANTE EN EL QUE SE PRESENTA FLUJO UNIFORME .....	24
2.5 DISTRIBUCIÓN DE PRESIONES EN UN CANAL CON PENDIENTE CONSTANTE Y FLUJO PERMANENTE GRADUALMENTE VARIADO .....	27
2.6 DISTRIBUCIÓN DE PRESIONES EN UN CANAL CON CURVATURA VERTICAL CON FLUJO UNIFORME .....	31
2.7 DISTRIBUCIÓN DE PRESIONES EN UN CANAL CON CURVATURA HORIZONTAL CON FLUJO UNIFORME .....	34
2.8 DISTRIBUCIÓN DE PRESIONES EN UN CANAL CON CIERTO GRADO DE CURVATURA (CASO GENERAL) .....	37
2.9 ESTIMACIÓN DE LA PRESIÓN A PARTIR DE LAS ECUACIONES DE EULER .....	40
2.9.1 Ecuaciones de Euler en coordenadas curvilíneas .....	40
2.9.2 Ecuaciones de Euler en coordenadas rectangulares .....	42
<b>CAPÍTULO 3</b> .....	<b>47</b>
<b>ECUACIONES FUNDAMENTALES</b> .....	<b>47</b>
3.1 ECUACIÓN GENERAL DE CONSERVACIÓN DE UNA PROPIEDAD .....	47
3.1.1 Sistema y volumen de control .....	47
3.1.2 Ecuación general de balance de la propiedad .....	48
3.2 ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN DE MASA .....	51
3.2.1 Concepto de masa .....	51
3.2.2 Expresiones generales .....	52
3.2.3 Ecuaciones completas .....	54
3.3 ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO .....	55
3.3.1 Cantidad de movimiento de una partícula .....	55
3.3.2 Cantidad de movimiento de un sistema .....	56
3.3.3 Expresiones generales .....	58
3.3.4 Expresiones completas .....	60
3.4 VERSIONES CONSERVATIVAS Y NO CONSERVATIVAS DE LAS ECUACIONES FUNDAMENTALES .....	71
3.4.1 Versiones conservativas .....	71
3.4.2 Versiones no conservativas .....	73
3.5 ECUACIONES DE SAINT-VENANT .....	75

# ÍNDICE DE CONTENIDO

3.6 ECUACIONES CARACTERÍSTICAS.....	76
3.7 ECUACIONES ADIMENSIONALES PARA MALLA FIJA .....	80
3.8 ECUACIONES TRANSFORMADAS PARA MALLA ADAPTIVA .....	81
3.9 ECUACIONES ADIMENSIONALES PARA MALLA ADAPTATIVA .....	84
3.10 ECUACIONES CARACTERÍSTICAS PARA MALLA ADAPTIVA .....	86
3.10.1 <i>Velocidad de crecimiento de la región de flujo</i> .....	88
3.11 ECUACIONES PARA FLUJO EN ESTADO PERMANENTE .....	90
3.11.1 <i>Clasificación de flujos</i> .....	90
3.11.2 <i>Ecuaciones clásicas para estado permanente</i> .....	92
3.11.2.1 Flujo espacialmente variado .....	93
3.11.2.2 Flujo gradualmente variado .....	95
3.11.2.3 Flujo uniforme .....	95
3.11.2.4 Flujo rápidamente variado (salto hidráulico) .....	96
3.11.2.5 Régimen crítico .....	97
3.11.2.6 Flujo sobre vertedores tipo cimacio .....	98
<b>CAPÍTULO 4.....</b>	<b>103</b>
<b>ECUACIONES TRANSFORMADAS APLICADAS A UNA REGIÓN DE FLUJO SUPERFICIAL QUE CRECE Y DECRECE EN EL ESPACIO Y EN EL TIEMPO.....</b>	<b>103</b>
4.1 MODELO COMPLETO .....	104
4.2 MODELO SIMPLIFICADO.....	107
4.3 VELOCIDAD DEL FRENTE DE AVANCE.....	108
4.3.1 <i>Relación espacial y temporal entre variables</i> .....	108
4.3.2 <i>Evaluación del volumen almacenado en el frente de onda</i> .....	110
4.3.3 <i>Velocidad del frente de onda</i> .....	111
4.4 VELOCIDAD DEL DESPLAZAMIENTO DE LA RETAGUARDIA .....	113
4.4.1 <i>Relación espacial y temporal entre variables</i> .....	114
4.4.2 <i>Evaluación del volumen almacenado en el frente de retroceso</i> .....	115
4.4.3 <i>Velocidad del avance de la frontera izquierda</i> .....	116
<b>CAPÍTULO 5.....</b>	<b>121</b>
<b>REFERENCIAS .....</b>	<b>121</b>

# ÍNDICE DE FIGURAS

---

<b>Figura 1.1</b> Trayectoria de una partícula.....	3
<b>Figura 1.2</b> Sistema de ejes coordenados .....	4
<b>Figura 1.3</b> Radio de curvatura .....	5
<b>Figura 1.4</b> Pendiente de la curva.....	5
<b>Figura 1.5</b> Triángulo rectángulo infinitesimal .....	6
<b>Figura 1.6</b> Vector de posición.....	8
<b>Figura 1.7</b> Ángulo formado por las tangentes.....	8
<b>Figura 2.1</b> Elemento diferencial de fluido .....	15
<b>Figura 2.2</b> Sistema de ejes cartesianos.....	18
<b>Figura 2.3</b> Líquido en reposo.....	19
<b>Figura 2.4</b> Aceleración lineal uniforme en un líquido .....	20
<b>Figura 2.5</b> Rotación de un fluido respecto a un eje vertical .....	22
<b>Figura 2.6</b> Rotación de un cilindro respecto a su eje.....	24
<b>Figura 2.7</b> Flujo uniforme en un canal de pendiente constante .....	25
<b>Figura 2.8</b> Flujo gradualmente variado en un canal de pendiente constante .....	27
<b>Figura 2.9</b> Flujo en un canal con curvatura vertical .....	31
<b>Figura 2.10</b> Flujo en un canal con curvatura horizontal.....	35
<b>Figura 2.11</b> Aceleración normal.....	38
<b>Figura 3.1</b> Sistema y volumen de control .....	48
<b>Figura 3.2</b> Transformación de coordenadas.....	63
<b>Figura 3.3</b> Radio como función de la coordenada binormal .....	64
<b>Figura 3.4</b> Componente de la fuerza de gravedad .....	66
<b>Figura 3.5</b> Flujo uniforme.....	67
<b>Figura 3.6</b> Relaciones geométricas .....	76
<b>Figura 3.7</b> Representación del fenómeno en diferentes mallas.....	82
<b>Figura 4.1</b> Velocidad de desplazamiento del frente de avance .....	109
<b>Figura 4.2</b> Velocidad de desplazamiento del frente de recesión (frontera izquierda) .	114



# NOMENCLATURA

---

$A$	= área hidráulica; $[L^2]$
$a$	= magnitud de la aceleración; $[L/T^2]$
$\underline{a}$	= vector aceleración de una partícula; $[L/T^2]$
$a_s$	= componente tangencial de la aceleración; $[L/T^2]$
$a_n$	= componente normal de la aceleración; $[L/T^2]$
$a_b$	= componente binormal de la aceleración; $[L/T^2]$
$B$	= ancho de la superficie libre; $[L]$
$b$	= coordenada binormal; $[L]$
$Ce$	= coeficiente de relación; $[L^{1-m}/T]$
$Cr$	= número de Courant; [adim]
$Cpq$	= creación de la propiedad $q$
$c$	= celeridad; $[L/T]$
$Dr$	= número adimensional para región deformable; [adim]
$D[pq]$	= tasa de creación de la propiedad
$d$	= tirante (medido sobre el eje $n$ , es decir, perpendicular a la plantilla del canal); $[L]$
$E$	= energía específica; $[L]$
$e_s$	= vector unitario orientado sobre el eje $s$
$e_n$	= vector unitario orientado sobre el eje $n$
$e_b$	= vector unitario orientado sobre el eje $b$
$\underline{F}$	= fuerza; $[w]$
$Fr$	= número de Froude
$\underline{f}$	= fuerza instantánea; $[W]$
$g$	= aceleración de la gravedad; $[L/T^2]$
$h$	= profundidad (tirante vertical); $[L]$
$h_o$	= tirante; $[L]$
$i$	= índice de posición espacial; [adim]
$l$	= longitud de mezcla; $[L]$
$M$	= función momentum; $[L^2/T^2]$
$Mpq$	= variación total de la propiedad $q$
$m$	= coeficiente de relación; [adim]
$m$	= masa; $[W/L^2]$
$n$	= coeficiente de rugosidad de Manning; $[T/L^{1/3}]$
$n$	= coordenada normal $[L]$
$n$	= índice de posición temporal; [adim]
$ns$	= número de surcos que atiende un módulo de riego; [adim]
$p$	= coeficiente empírico de la ecuación del avance del frente de onda; $[L T^{-1}]$
$P$	= perímetro mojado; $[L]$
$p$	= coeficiente empírico de la ecuación del avance del frente de onda; $[T L^{-R}]$

---

# NOMENCLATURA

---

$p$	= presión; $[W/L^2]$
$p_a$	= presión atmosférica (presión sobre una superficie libre); $[W/L^2]$
$p_o$	= presión en el origen de referencia o de coordenadas; $[W/L^2]$
$Q$	= gasto; $[L^3/T]$
$Q_{sf}$	= gasto descargado al final del surco una vez que se alcanza un estado de flujo superficial permanente; $[L^3/T]$
$Q^*$	= caudal adimensional; [adim]
$Q_{pq}$	= cantidad de la propiedad $q$
$q$	= gasto infiltrado a través de $S_i$ ; $[L^3/T]$
$q$	= propiedad intensiva escalar
$ql$	= gasto lateral; $[L^2/T]$
$R$	= vector de posición; [L]
$Re$	= número de Reynolds; [adim]
$Rh$	= radio hidráulico; [L]
$r$	= radio de curvatura; [L]
$S$	= superficie; $[L^2]$
$s$	= coordenada espacial o tangencial; [L]
$sf$	= posición del frente de onda; [L]
$s_f$	= pendiente de fricción; [adim]
$s_o$	= pendiente de plantilla; [adim]
$sr$	= posición del frente de retroceso; [L]
$t$	= tiempo adimensional; [adim]
$t$	= tiempo; [T]
$u$	= velocidad media; $[L/T]$
$V$	= volumen; $[L^3]$
$Vn$	= velocidad normalizada, $[L/T]$
$v_s$	= componente de la velocidad en la dirección $s$ ; $[L/T]$
$\underline{v}$	= vector velocidad de una partícula; $[L/T]$
$v$	= velocidad de una partícula; $[L/T]$
$W$	= peso; [W]
$w$	= velocidad angular; $[RAD/T]$
$w_s$	= velocidad de las secciones de la región de flujo con $\xi$ fijo; $[L/T]$
$x$	= eje coordenado horizontal, [L]
$Y$	= tirante hidráulico; [L]
$y$	= eje coordenado perpendicular, [L]
$Z$	= volumen infiltrado por unidad de longitud de canal $[L^3/L]$
$z$	= eje coordenado vertical y profundidad; [L]
$\alpha$	= ángulo de curvatura o inclinación; [RAD]

# NOMENCLATURA

---

$\alpha_c$	= ángulo de curvatura; [RAD]
$\Delta s$	= incremento de la coordenada espacial; [L]
$\Delta tr$	= incremento al tiempo de oportunidad por efecto de la recesión; [T]
$\Delta t$	= incremento de tiempo; [T]
$\Delta \xi$	= incremento de la coordenada adimensional; [adim]
$\varepsilon$	= altura media de las partículas; [L]
$\gamma_0$	= peso específico; [W/L <sup>3</sup> ]
$\nu$	= viscosidad cinemática; [L <sup>2</sup> /T]
$\tau$	= variable temporal auxiliar; [T]
$\tau_c$	= esfuerzo cortante;
$\tau_t$	= esfuerzo cortante turbulento; [W/L <sup>2</sup> ]
$\Omega$	= potencial de fuerzas externas; [L]
$\omega$	= velocidad angular; [RAD/T]
$\omega_r$	= coeficiente empírico de la ecuación de recesión; [T L <sup>-1</sup> ]
$\xi$	= variable espacial adimensional
$\bar{\zeta}$	= profundidad al centro de gravedad; [L]



**Cinemática de una partícula**

**1**

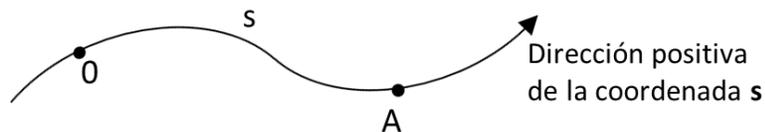


## Capítulo 1

### Cinemática de una partícula

La cinemática es la parte de la mecánica dedicada al estudio de los procedimientos que describen el movimiento independientemente de las causas que lo producen. Este campo de la física incluye la cinemática de punto, por medio de la cual se estudian la velocidad y aceleración de una partícula entre otros fenómenos. En la actualidad existen varios procedimientos, ampliamente difundidos, para describir el movimiento de una partícula (Irodov, 1981). Entre ellos se pueden citar el método vectorial y el llamado natural. En el presente trabajo se adopta el segundo de estos métodos, el cual está relacionado con las coordenadas curvilíneas o naturales.

El procedimiento natural se aplica cuando la trayectoria de la partícula se conoce con anticipación. La posición de la partícula en  $A$  está determinada por la coordenada curvilínea  $s$  (**Figura 1.1**), es decir, por la distancia a lo largo de la trayectoria desde el origen de referencia elegido  $O$ . De aquí se establece arbitrariamente la dirección positiva de la lectura de la coordenada  $s$ , tal y como, a manera de ejemplo, se muestra con la flecha en la **Figura 1.1**. El movimiento de una partícula se considera determinado cuando se conoce su trayectoria, su origen de referencia  $O$ , la dirección positiva de lectura de la coordenada  $s$  y la ley de movimiento del punto, es decir, la función  $s(t)$ .

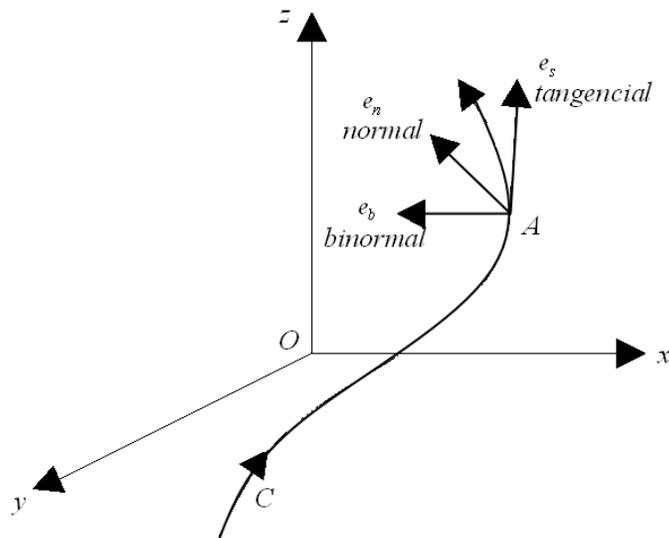


**Figura 1.1** Trayectoria de una partícula

#### 1.1 Sistema de coordenadas naturales

Al estudiar las leyes del movimiento, en diversos sistemas de referencia, se manifiestan ventajas y desventajas esenciales, tanto en su planteamiento como en su solución, entre una clase de sistema y otro (Sámano y Sen, 2009). En principio se puede adoptar cualquier sistema. Sin embargo, en general las leyes del movimiento presentan diferentes formas y puede resultar que en un sistema arbitrario incluso fenómenos muy sencillos se tornen muy complejos. Ante esta condición, surge de manera natural el reto y el interés científico por encontrar un sistema de referencia apropiado, en el cual las leyes del movimiento aplicadas al fenómeno de interés sean lo más simples posible (Jiménez y Berezowsky, 2004). Este sería el sistema de coordenadas más cómodo y comprensible para la descripción de los fenómenos físicos en estudio.

Cuando una partícula se mueve en el espacio y describe una curva que se desarrolla en tres dimensiones, resulta que es factible y a la vez conveniente ligar la partícula a un sistema coordenado rectangular, de tal manera que una coordenada sea tangente a la trayectoria, otra sea normal a ella, quedando definida a lo largo del radio de curvatura, y que la tercera sea normal a las dos primeras. Estas coordenadas se denominan tangencial ( $s$ ), normal ( $n$ ) y binormal ( $b$ ), respectivamente y en conjunto son conocidas como coordenadas curvilíneas o naturales (**Figura 1.2**).

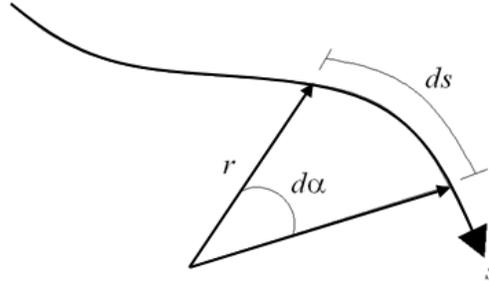


**Figura 1.2** Sistema de ejes coordenados

En la **Figura 1.2**, que muestra el movimiento aleatorio de una partícula, se considera que la partícula se mueve a lo largo de la curva  $C$ , siguiendo la flecha que indica su avance. Si se supone que en el tiempo  $t$ , la partícula está en el punto  $A$ , en ese momento los vectores unitarios  $e_s$  y  $e_n$  estarán ubicados sobre las coordenadas tangencial y normal en  $A$ , respectivamente. Bajo estas condiciones el vector  $e_s$  es positivo según el sentido del recorrido de  $C$ ;  $e_n$  está sobre el radio de curvatura y es positivo hacia el centro del mismo. Si al plano formado por  $e_s$  y  $e_n$  se le denomina como plano osculador, resulta que el vector unitario  $e_b$  se desarrolla a lo largo de la dirección binormal y es perpendicular al plano osculador en  $A$ .

Cuando una partícula se mueve a lo largo de una curva plana, como la mostrada en la **Figura 1.3**, se aprecia que en un intervalo de tiempo  $dt$ , a la vez que describe el segmento  $ds$ , la tangente de su trayectoria barre un ángulo  $d\alpha$ . Ante este desplazamiento, por geometría, se cumple  $ds = r d\alpha$ , en donde  $r$  es el radio de curvatura

y  $d\alpha$  es el ángulo girado por  $r$ ; cabe destacar que el mismo ángulo  $d\alpha$  también es girado por la tangente.

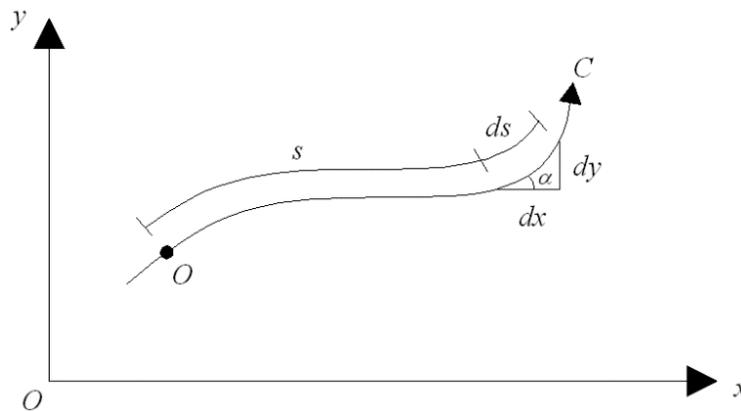


**Figura 1.3** Radio de curvatura

De aquí que:

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{r} \quad (1.1)$$

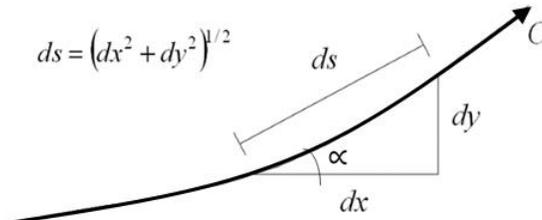
A la derivada  $d\alpha/ds$  se le conoce como curvatura de la curva y es igual al recíproco del radio  $r$ . Si se considera una curva  $C$ , definida por  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$ , en donde  $t$  representa el tiempo, tal y como se ilustra en la **Figura 1.4**.



**Figura 1.4** Pendiente de la curva

Al tomar un triángulo rectángulo infinitesimal, de lados  $dx$ ,  $dy$  y  $ds$  (**Figura 1.5**), se cumple  $ds^2 = dx^2 + dy^2$ , expresión que al ser dividida entre  $dt^2$  conduce a:

$$(ds/dt)^2 = (dx/dt)^2 + (dy/dt)^2$$



**Figura 1.5** Triángulo rectángulo infinitesimal

Dado que  $\tan \alpha = dy/dx$ , al dividir el numerador y el denominador entre  $dt$ , se obtiene:

$$\tan \alpha = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

Derivando con respecto a  $t$ :

$$\frac{d\alpha}{dt} (1 + \tan^2 \alpha) = \frac{\frac{dx}{dt} \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \frac{d^2x}{dt^2}}{(dx/dt)^2} \quad (1.2)$$

y dado que por principios trigonométricos se cumple

$$\tan \alpha = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

Al sustituir en (1.2) resulta:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\frac{dx}{dt} \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \frac{d^2x}{dt^2}}{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2} \quad (1.3)$$

Si adicionalmente se considera

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{1}{r} \frac{ds}{dt} = \frac{[(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2]^{1/2}}{r}$$

y se asume que la curvatura es positiva, al igualar la expresión anterior con la (1.3), la curvatura de la curva resulta ser

$$\frac{1}{r} = \left| \frac{\frac{dx}{dt} \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \frac{d^2x}{dt^2}}{\left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 \right]^{3/2}} \right| \quad (1.4)$$

Esta relación proporciona una forma conveniente de evaluar  $\frac{1}{r}$  cuando  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  son conocidas y se dan como ecuaciones paramétricas de la trayectoria. Si en la expresión (1.4) se reemplazan las derivadas  $d/dt$  por  $d/dx$ , es decir, que la curva permanece fija, resulta:

$$\frac{1}{r} = \left| \frac{d^2y/dx^2}{\left[ 1 + (dy/dx)^2 \right]^{3/2}} \right| \quad (1.5)$$

Esta ecuación proporciona una forma adecuada de evaluar la curvatura de la curva cuando la trayectoria se da en un plano (x, y), es decir, mediante una función  $y = y(x)$ . Bajo este mismo principio, al ser de aplicación general, en el caso en que la curva se desarrolle en el plano  $x-z$  y sea proporcionada en la forma  $z = z(x)$ , la ecuación resultante para evaluar la curvatura estará dada por:

$$\frac{1}{r} = \left| \frac{d^2z/dx^2}{\left[ 1 + (dz/dx)^2 \right]^{3/2}} \right| \quad (1.6)$$

## 1.2 Aceleración de una partícula

Antes de proceder a deducir las ecuaciones que representan la aceleración de una partícula, es conveniente recordar que el vector de posición en coordenadas cartesianas resulta ser el que se presenta en la **Figura 1.6**,  $R = xi + yj + zk$ , de donde

$$\frac{dR}{ds} = \frac{dx}{ds}i + \frac{dy}{ds}j + \frac{dz}{ds}k = li + mj + nk \quad (1.7)$$

Es decir que

$\frac{dR}{ds}$  = vector unitario y  $l, m$  y  $n$ , son los cosenos directores.

Dado que  $dx/ds, dy/ds$  y  $dz/ds$  son las componentes de un vector tangente, entonces el vector unitario  $dR/ds$  es tangente a la trayectoria, por lo tanto:

$$\frac{dR}{ds} = e_s \tag{1.8}$$

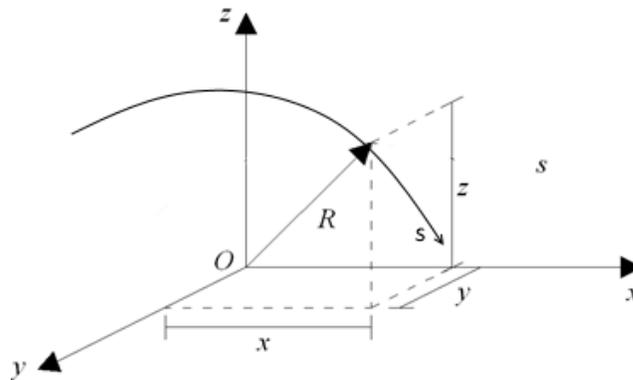


Figura 1.6 Vector de posición

Para considerar el cambio de  $e_s$  con respecto a  $\alpha, s$  y  $t$ ; es importante resaltar que al ser  $e_s$  un vector unitario su magnitud se mantiene constante, igual a la unidad, independientemente de que su dirección cambie.

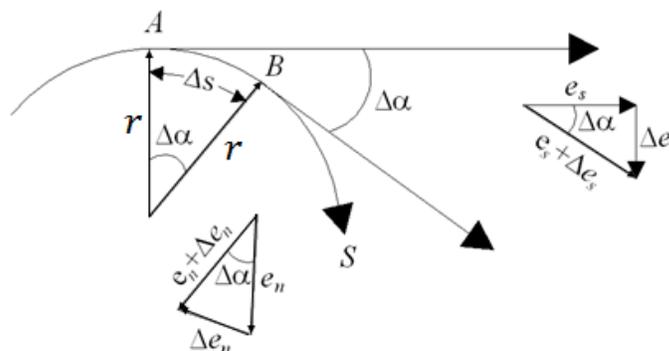


Figura 1.7 Ángulo formado por las tangentes

De esta manera, al analizar una partícula que se mueve de la posición  $A$  hasta la  $B$ , describiendo un pequeño arco  $\Delta s$  en un intervalo de tiempo  $\Delta t$ , como se ilustra en la **Figura 1.7**, resulta que el ángulo formado por las tangentes trazadas por esos dos puntos es igual al ángulo formado por el desplazamiento angular del radio, que tiene como eje de giro su centro de curvatura.

Bajo estas condiciones,  $e_s$  y  $e_s + \Delta e_s$  son vectores unitarios que forman un triángulo isósceles, por lo que se establece la siguiente relación:

$$|\Delta e_s| = \Delta e_s = 2 \operatorname{sen} \frac{\Delta \alpha}{2}$$

Dado que  $\Delta \alpha$  es un ángulo pequeño:

$$\operatorname{sen} \frac{\Delta \alpha}{2} \cong \frac{\Delta \alpha}{2}$$

y

$$\lim_{\Delta \alpha \rightarrow 0} \frac{\Delta e_s}{\Delta \alpha} = \frac{de_s}{d\alpha} = 1 \quad (1.9)$$

Por lo tanto,  $de_s/d\alpha$  es un vector unitario cuya dirección coincide con la dirección límite de  $\Delta e_s$  cuando  $\Delta \alpha \rightarrow 0$  que es la dirección de  $e_n$ ; de donde:

$$\frac{de_s}{d\alpha} = e_n \quad (1.10)$$

Con un análisis semejante se demuestra que:

$$\frac{de_n}{d\alpha} = -e_s \quad (1.11)$$

Para evaluar  $de_s/ds$  se tiene  $ds = r d\alpha$ , por lo tanto:

$$\frac{de_s}{ds} = \frac{1}{r} \frac{de_s}{d\alpha} = \frac{1}{r} e_n \quad (1.12)$$

y para evaluar  $de_s/dt$ , se tiene

$$\frac{de_s}{dt} = \frac{de_s}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{1}{r} \frac{ds}{dt} e_n \quad (1.13)$$

De aquí que la velocidad y aceleración de una partícula puedan ser determinadas a través de las siguientes relaciones:

$$\underline{v} = \frac{dR}{dt} = \frac{dR}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} e_s \quad (1.14)$$

$$\underline{v} = v e_s$$

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{d^2R}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{ds}{dt} e_s \right) = \frac{d^2s}{dt^2} e_s + \frac{ds}{dt} \frac{de_s}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} e_s + \frac{1}{r} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 e_n \quad (1.15)$$

$$\underline{a} = \frac{dv}{dt} e_s + \frac{v^2}{r} e_n$$

Tomando en cuenta que  $v = v(s, t)$ , de acuerdo con el criterio de derivada total, resulta:

$$\underline{a} = \left( \frac{\partial v}{\partial s} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial v}{\partial t} \right) e_s + \frac{v^2}{r} e_n \quad (1.16)$$

$$\underline{a} = \left( v \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} \right) e_s + \frac{v^2}{r} e_n$$

$$\underline{a} = \left[ \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{v^2}{2} \right) + \frac{\partial v}{\partial t} \right] e_s + \frac{v^2}{r} e_n \quad (1.17)$$

De lo anterior, entre otros aspectos, se deduce que:

- La velocidad es tangente a la trayectoria y su magnitud es  $ds/dt$
- La aceleración tiene dos componentes, una es la componente tangencial, de magnitud  $dv/dt$ , y se debe al cambio de magnitud de la velocidad.

$$\underline{a}_s = \frac{dv}{dt} e_s \quad (1.18)$$

La otra es la componente normal o centrípeta de magnitud  $v^2/r$  dirigida hacia el centro de la curvatura. Esta componente es originada por efecto del cambio de dirección de la velocidad.

$$\underline{a}_n = \frac{v^2}{r} e_n \quad (1.19)$$

c) La magnitud de la aceleración está dada por:

$$a = \left[ \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 + \left( \frac{v^2}{r} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (1.20)$$

d) De acuerdo con (1.17), se aprecia que la aceleración tangencial se puede descomponer en una componente de aceleración convectiva  $\underline{a}_{sc}$  y otra de aceleración local  $\underline{a}_{sl}$ :

$$\underline{a}_{sc} = v \frac{\partial v}{\partial s} e_s = \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{v^2}{2} \right) e_s \quad (1.21)$$

$$\underline{a}_{sl} = \frac{\partial v}{\partial t} e_s \quad (1.22)$$

e) El vector aceleración se encuentra en el plano osculador y solo tiene componentes en las direcciones tangencial y normal. Por lo tanto, la componente de la aceleración, en la dirección del tercer vector unitario  $e_b$ , vale cero. Esto es debido a que  $n$  se ha elegido en la dirección de la normal principal.

$$\underline{a}_b = 0 \quad (1.23)$$

### 1.3 Formas adicionales para evaluar la curvatura

Conocida  $R$  de la curva como función de la distancia recorrida a partir del punto inicial.

$$\frac{1}{r} = \left| \frac{d^2 r}{ds^2} \right| \quad (1.24)$$

La ecuación de  $r$  se obtiene mediante una operación vectorial.

Usando coordenadas tangencial y normal se puede escribir:

$$\frac{1}{r} = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|^3} \quad (1.25)$$

Por su nivel de importancia en la caracterización del movimiento de las partículas el estudio de la curvatura de la curva que describe su trayectoria ha dado origen a una extensa cantidad de trabajos orientados a la obtención de la misma (Escudero, Valencia y Poveda, 2013).

**Distribución hidrostática de presiones**

**2**

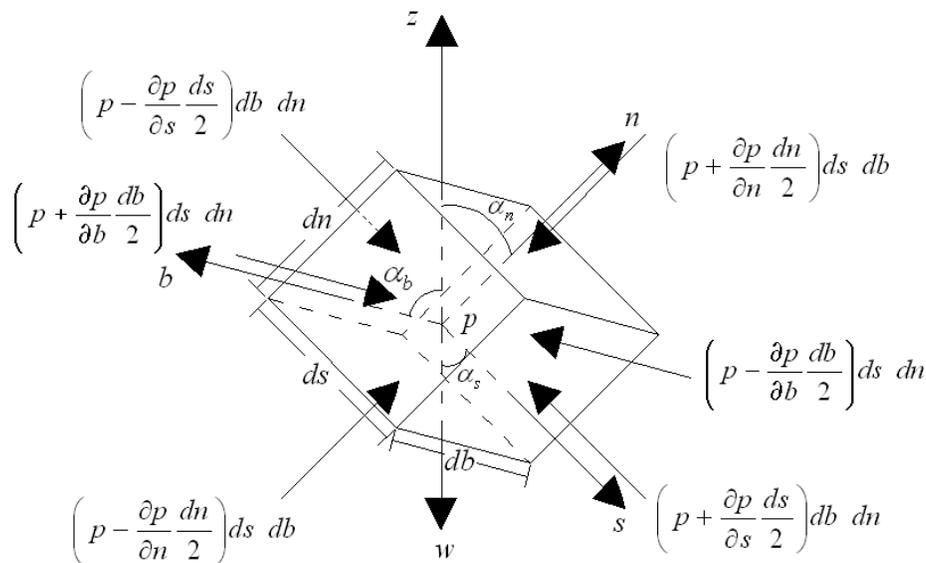


## Capítulo 2

### Distribución hidrostática de presiones

**E**n el campo de la hidrostática la variación de presiones se calcula suponiendo ausencia de esfuerzos cortantes (Streeter y Wilie, 1979). Para el caso de flujo de fluidos, en los cuales no se presenta movimiento relativo entre placas adyacentes del mismo fluido, los esfuerzos cortantes también resultan nulos. Así, un fluido que se traslada con velocidad uniforme sigue las leyes de variación hidrostática de presión. De la misma manera, cuando un fluido es sometido a una aceleración tal que tampoco exista movimiento relativo entre capas adyacentes, es decir, cuando se acelera como si fuera un sólido, no se desarrollan esfuerzos cortantes y la variación de la presión se puede determinar estableciendo la segunda ley de Newton en un cuerpo libre apropiado.

A partir de este principio, para estudiar la variación de la presión, se adopta un elemento diferencial de fluido, en forma de paralelepípedo rectangular, cuyos lados  $ds$ ,  $dn$  y  $db$  son respectivamente paralelos a los ejes coordenados tangencial, normal y binormal (**Figura 2.1**). En el centro de este elemento, que se encuentra en el punto  $(s, n, b)$ , se considera que la presión tiene un valor  $p$ .



**Figura 2.1** Elemento diferencial de fluido

Por la segunda ley de Newton:

$$\underline{F} = \frac{d}{dt}(m\underline{v})$$

en donde  $\underline{F}$  es la fuerza,  $m$  la masa y  $\underline{v}$  la velocidad, y el producto  $m\underline{v}$  se define como la cantidad de movimiento de la partícula.

En el campo de la hidráulica y para la mayoría de los fenómenos que se describen a través de la física newtoniana, la masa  $m$  se considera constante. Por consiguiente, resulta conveniente escribir:

$$\underline{F} = m \frac{d\underline{v}}{dt} = m\underline{a}$$

la cual al ser expresada a través de sus componentes vectoriales en las direcciones  $s$ ,  $n$  y  $b$ , resulta:

$$\underline{F}_s + \underline{F}_n + \underline{F}_b = m(\underline{a}_s + \underline{a}_n + \underline{a}_b) \quad (2.1)$$

Para el caso del volumen de control mostrado en la **Figura 2.1**, la masa del elemento diferencial está dada por:

$$dm = \rho \, ds \, dn \, db$$

De aquí que la fuerza de cuerpo que actúa sobre el mismo, debida a la aceleración de la gravedad, resulte ser:

$$W = \rho \, g \, ds \, dn \, db$$

Multiplicando escalarmente la Ecuación 2.1 por los vectores unitarios  $e_s$ ,  $e_n$ ,  $e_b$  y suponiendo que las únicas fuerzas que están actuando sobre el volumen diferencial son las originadas por efecto de la presión y la gravedad, se obtienen las relaciones que establecen el equilibrio de fuerzas en cada una de las direcciones coordenadas  $s$ ,  $n$  y  $b$ .

Para la dirección  $s$ :

$$\left( p - \frac{\partial p}{\partial s} \frac{ds}{2} \right) dn \, db - \left( p + \frac{\partial p}{\partial s} \frac{ds}{2} \right) dn \, db + W \cos \alpha_s = m \, a_s$$

$$-\frac{\partial p}{\partial s} ds \, dn \, db + \rho \, g \cos \alpha_s \, ds \, dn \, db = \rho \, ds \, dn \, db \, a_s$$

Dividiendo entre  $ds$   $dn$   $db$  y despejando  $\frac{\partial p}{\partial s}$

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \rho g \left( \cos \alpha_s - \frac{a_s}{g} \right) \quad (2.2)$$

Por un procedimiento semejante en las direcciones  $n$  y  $b$  se obtiene:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \rho g \left( -\cos \alpha_n - \frac{a_n}{g} \right) \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial b} = \rho g \left( -\cos \alpha_b - \frac{a_b}{g} \right) \quad (2.4)$$

Por otra parte, dado que  $p = p(s, n, b)$ , su diferencial total es:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial s} ds + \frac{\partial p}{\partial n} dn + \frac{\partial p}{\partial b} db \quad (2.5)$$

sustituyendo (2.2), (2.3) y (2.4) en (2.5)

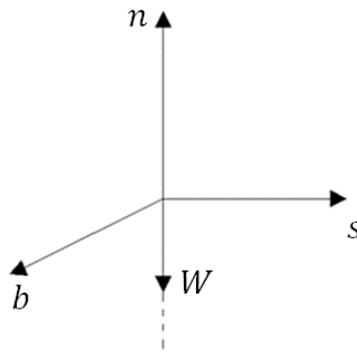
$$dp = \rho g \left( \cos \alpha_s - \frac{a_s}{g} \right) ds + \rho g \left( -\cos \alpha_n - \frac{a_n}{g} \right) dn + \rho g \left( -\cos \alpha_b - \frac{a_b}{g} \right) db \quad (2.6)$$

Integrar esta ecuación permite conocer la distribución de presiones en un campo gravitacional. En el campo de la ingeniería hidráulica existen varios casos de interés práctico para los que se puede lograr su integración analítica. A continuación se presentan algunos de ellos.

## 2.1 Distribución de presiones en un líquido en reposo

Si se hacen coincidir los ejes coordenados  $s$ ,  $n$  y  $b$  con un sistema de ejes cartesianos tal que  $n$  se encuentre alineado con la dirección de la fuerza de gravedad  $W$ , como se ilustra en la **Figura 2.2**. En estas condiciones, al ser  $\cos \alpha_s = \cos \alpha_b = 0$ ,  $\cos \alpha_n = 1$  y  $a_s = a_n = a_b = 0$ , la Ecuación 2.6 se reduce a:

$$dp = -\rho g dn \quad (2.7)$$



**Figura 2.2** Sistema de ejes cartesianos

Cuando el fluido es un líquido con una superficie libre, expuesta a la presión atmosférica  $p_a$ , la ecuación de esta superficie queda definida por  $p = p_a$ . Si adicionalmente se considera que el líquido es incompresible y homogéneo, como es el caso del agua, la Ecuación 2.7 puede ser integrada entre un punto ubicado en el origen ( $p = p_o, n_o = 0$ ) y otro sobre la superficie libre ( $p = p_a, n = n_a$ ), con lo que resulta

$$p_a - p_o = -\rho g(n_a - 0) \quad (2.8)$$

de donde:

$$p_o = p_a + \rho g n_a \quad (2.9)$$

Si se adopta como presión de referencia a la presión atmosférica y de manera convencional se le asigna un valor  $p_a = 0$ , la ecuación anterior se reduce a:

$$p_o = \rho g n_a \quad (2.10)$$

En esta relación  $n_a$  corresponde a la distancia medida a partir de un punto ubicado en el origen de la coordenada  $n$ , es decir, en  $n = 0$ , hasta otro en el cual se presenta la presión atmosférica, que en el caso de canales corresponde a uno ubicado sobre la superficie libre en  $n = n_a$  (**Figura 2.3a**). Por lo tanto, si se designa  $h_o$  como la profundidad a que se encuentra dicho origen,  $h_o = n_a$ .

La Ecuación 2.10 se puede escribir también en la forma:

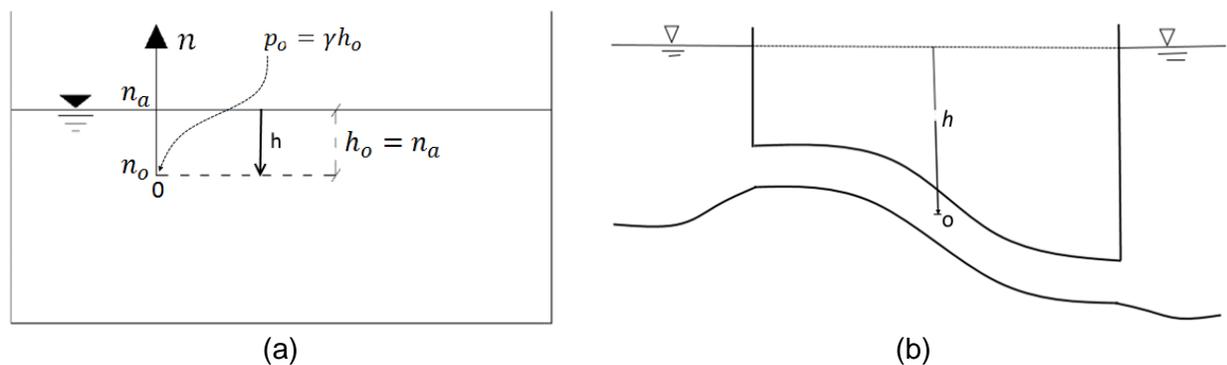
$$p_o = \gamma_o h_o \quad (2.11)$$

Esta ecuación es la más conocida y comúnmente empleada para el cálculo de la distribución de presiones en un líquido en condiciones hidrostáticas de absoluto reposo.

Es práctica común adoptar:

$$p = \gamma_o h \quad (2.12)$$

en el entendido de que la presión  $p$  se evalúa a la profundidad  $h$  medida a partir de la superficie libre hasta el punto de interés. En el caso de un sistema o conducto que se encuentra presurizado entre dos canales o cuerpos de agua en absoluto reposo, el valor de  $h$  corresponde a la profundidad medida a partir de la superficie libre presente en los cuerpos de agua hasta el punto de interés (**Figura 2.3b**).

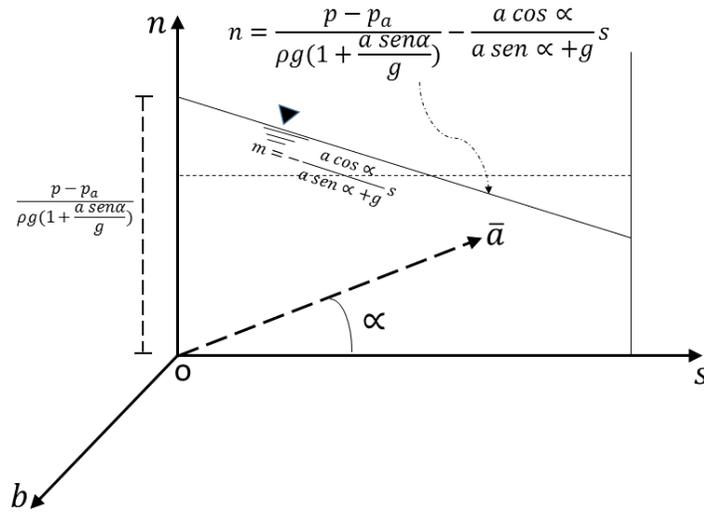


**Figura 2.3** Líquido en reposo

## 2.2 Equilibrio relativo debido a una aceleración lineal uniforme

Si un líquido contenido en un recipiente abierto es sometido a una aceleración lineal uniforme  $\underline{a}$  (**Figura 2.4**), después de un cierto tiempo el líquido se ajustará a la aceleración moviéndose como si fuera un sólido. Es decir, la distancia entre cada una de las partículas permanece fija y, en consecuencia, no se desarrollan esfuerzos cortantes (Streeter y Wylie, 1979).

Bajo estas condiciones, si se hace coincidir el eje  $n$  con el de la fuerza de gravedad  $W$ , es decir, con la dirección vertical, y se selecciona un sistema de coordenadas cartesianas tal que el vector aceleración  $\underline{a}$  se desarrolle en el plano  $s-n$ , entonces no existirá componente de la aceleración en la dirección binormal  $b$  (**Figura 2.4**).



**Figura 2.4** Aceleración lineal uniforme en un líquido

En este marco de referencia la Ecuación 2.6 se reduce a:

$$dp = -\rho g \frac{a_s}{g} ds - \rho g \left( 1 + \frac{a_n}{g} \right) dn \quad (2.13)$$

En donde se ha tomado en cuenta que

$$\cos \alpha_s = \cos \alpha_b = 0 \quad \text{y} \quad \cos \alpha_n = 1$$

La Ecuación 2.13 se puede integrar considerando fluido incompresible y homogéneo, con lo que resulta:

$$p_a - p = -\rho g \frac{a_s}{g} s - \rho g \left( 1 + \frac{a_n}{g} \right) n \quad (2.14)$$

de donde:

$$p = p_a + \rho g \frac{a_s}{g} s - \rho g \left( 1 + \frac{a_n}{g} \right) n \quad (2.15)$$

Si se adopta la presión atmosférica como presión de referencia ( $p_a = 0$ ), se obtiene:

$$p = \rho g \frac{a_s}{g} s + \rho g \left( 1 + \frac{a_n}{g} \right) n \quad (2.16)$$

Despejando  $n$

$$n = - \frac{a_s}{a_n + g} s + \frac{p}{\rho g \left( 1 + \frac{a_n}{g} \right)} \quad (2.17)$$

Esta relación describe el perfil de la superficie libre que se presenta en un líquido acelerado uniformemente. Para este caso en particular resulta interesante hacer notar que las líneas de presión constante ( $p = \text{constante}$ ) tienen una pendiente definida por la relación:

$$- \frac{a_s}{a_n + g}$$

Dichas líneas son paralelas al perfil de la superficie libre del agua, como se demuestra al despejar  $n$  de (2.15) y comparar con (2.17)

$$n = - \frac{a_s}{a_n + g} s + \frac{p - p_a}{\rho g \left( 1 + \frac{a_n}{g} \right)} \quad (2.18)$$

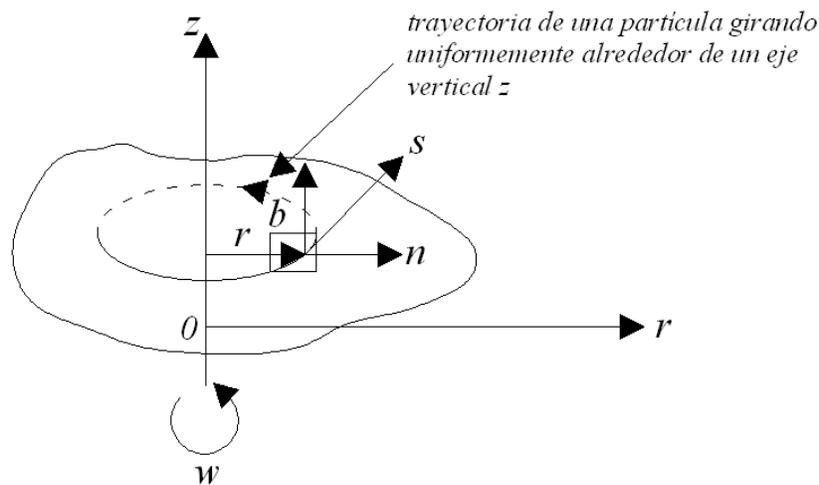
En ocasiones resulta práctico expresar (2.18) en la forma:

$$n = - \frac{a \cos \alpha}{a \operatorname{sen} \alpha + g} s + \frac{p - p_a}{\rho g \left( 1 + \frac{a \operatorname{sen} \alpha}{g} \right)} \quad (2.19)$$

En algunos casos los datos proporcionados permiten determinar el perfil de la superficie libre a través de este tipo relación, es decir, en función de la aceleración  $a$  que es sometido el sistema y el ángulo con que se aplica. De esta manera el perfil de la superficie libre del agua está dado por la Ecuación 2.19 y corresponde a una superficie linealmente descendente en la dirección  $s$ , tal como se ilustra en la **Figura 2.4**.

### 2.3 Equilibrio relativo debido a rotación uniforme del líquido respecto a un eje vertical

La rotación de un fluido respecto a un eje, de tal manera que todas sus partículas tengan la misma velocidad angular, es decir, como si fuera un sólido, se conoce como movimiento de vórtice forzado (**Figura 2.5**).



**Figura 2.5** Rotación de un fluido respecto a un eje vertical

Este movimiento se presenta cuando un líquido contenido dentro de un recipiente se hace girar con velocidad angular constante y alrededor de un eje vertical. Por lo cual, después de un cierto tiempo y dadas las características del movimiento, no se presenta ningún esfuerzo cortante en el seno del líquido y la única aceleración resultante está dirigida radialmente hacia el eje de rotación. Para analizar este caso, resulta adecuado hacer coincidir el eje  $s$  con la tangente de la trayectoria de la partícula, el eje  $n$  con la dirección radial  $r$  y el eje  $b$  con el eje vertical de rotación  $z$ . De esta manera la Ecuación 2.6 se puede expresar como:

$$dp = \rho g \left( \cos \alpha_s - \frac{a_s}{g} \right) ds + \rho g \left( -\cos \alpha_r - \frac{a_r}{g} \right) dr + \rho g \left( -\cos \alpha_z - \frac{a_z}{g} \right) dz \quad (2.20)$$

Tomando en cuenta que el eje  $z$  es vertical y que los ejes  $s$  y  $r$  son perpendiculares al mismo, se cumple  $\cos \alpha_s = \cos \alpha_r = 0$  y  $\cos \alpha_z = 1$ .

Si se agrega que no existen componentes de la aceleración en las direcciones  $s$  y  $z$ , la Ecuación 2.20 se simplifica expresándose de la forma siguiente:

$$dp = -\rho g \frac{a_r}{g} dr - \rho g dz \quad (2.21)$$

Para este caso la aceleración radial es igual al producto de la velocidad angular  $w$  al cuadrado por el radio de curvatura  $r$ , es decir,  $a_r = -w^2 r$ . El signo negativo indica que dicha aceleración está dirigida radialmente hacia el centro de curvatura. De aquí que la Ecuación 2.21 resulte ser:

$$dp = \rho g \frac{w^2 r}{g} dr - \rho g dz \quad (2.22)$$

Integrando esta relación, considerando fluido incompresible, homogéneo y tomando en cuenta que  $w = \text{constante}$ , resulta:

$$p = \rho g \frac{w^2 r^2}{2g} - \rho g z + C$$

Si la presión es igual a  $p$  en el origen, entonces  $C = p$  y si adicionalmente se toma en cuenta la existencia de una superficie libre en la cual  $p = p_a$ , entonces la relación anterior se expresa como:

$$p_a - p = \rho g \frac{w^2 r^2}{2g} - \rho g z \quad (2.23)$$

Considerando  $p_a = 0$  y despejando  $p$ , se obtiene:

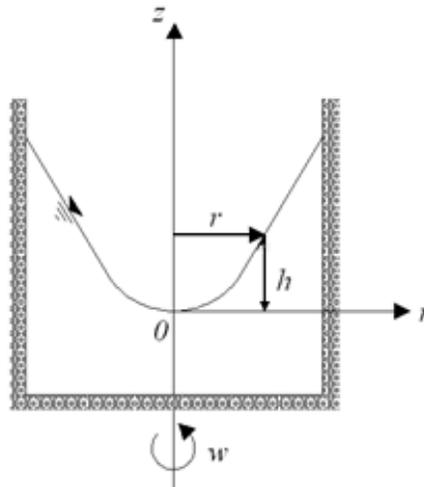
$$p = \rho g z - \rho g \frac{w^2 r^2}{2g} \quad (2.24)$$

En esta ecuación  $z$  representa la distancia medida desde un punto ubicado en el origen  $z = 0$  hasta la superficie libre. Al designar  $h$  como la profundidad a que se encuentra dicho origen, la expresión (2.24) se puede escribir en la forma:

$$p = \rho g h - \rho g \frac{w^2 r^2}{2g} \quad (2.25)$$

Si en particular se selecciona el plano horizontal  $z=0$  de tal manera que sobre este se cumpla  $p=0$  (**Figura 2.6**) y tomando en cuenta que  $\gamma_0 = \rho g$ , la Ecuación 2.25 se reduce a la siguiente igualdad:

$$h = \frac{w^2 r^2}{2g} \quad (2.26)$$



**Figura 2.6** Rotación de un cilindro respecto a su eje

Esta relación indica que la superficie libre es igual a un paraboloides de revolución, de donde se concluye que todas las superficies de igual presión son paraboloides de revolución. La ecuación de dichas superficies se puede obtener a partir de la Ecuación 2.23, de donde resulta:

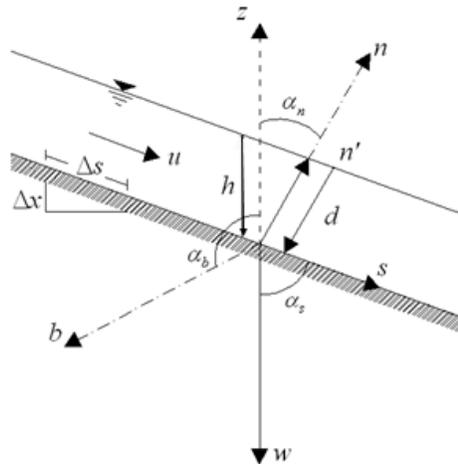
$$z = \frac{p - p_a}{\gamma_0} + \frac{w^2 r^2}{2g} \quad (2.27)$$

#### 2.4 Distribución de presiones sobre un canal de pendiente constante en el que se presenta flujo uniforme

Un flujo uniforme se caracteriza por tener una variación nula del tirante y de la velocidad tanto en el espacio como en el tiempo. Esto implica que las partículas de fluido se trasladan con una velocidad uniforme, por lo que no se presenta movimiento

relativo entre placas adyacentes del mismo y por lo tanto no existen esfuerzos cortantes en su interior (Chow, 1982). Estas propiedades del flujo uniforme permiten considerar que el movimiento del fluido sea semejante al de un sólido que se desplaza con una velocidad constante y, en consecuencia, tanto la aceleración local como la convectiva resultan nulas.

Si además se considera que el canal es de pendiente constante y se hace coincidir el eje  $s$  con el trazo longitudinal del mismo (**Figura 2.7**), resulta que  $\cos \alpha_s$ ,  $\cos \alpha_n$  y  $\cos \alpha_b$  son constantes y por lo tanto el radio de curvatura en cualquiera de las direcciones coordenadas es infinito. Si se agregan las características de flujo uniforme, que implican variación nula de tirantes y velocidades, resulta que también la aceleración centrípeta por efecto de curvatura es nula. De aquí se deduce que  $a_s = a_n = a_b = 0$ .



**Figura 2.7** Flujo uniforme en un canal de pendiente constante

Tomando en cuenta las consideraciones indicadas anteriormente, la Ecuación 2.6 se simplifica a la forma:

$$dp = \rho g \cos \alpha_s ds - \rho g \cos \alpha_n dn - \rho g \cos \alpha_b db \quad (2.28)$$

Por otra parte, como se puede apreciar en la **Figura 2.7**, la dirección de la coordenada  $b$  coincide con un eje horizontal y, por lo tanto;  $\cos \alpha_b = 0$ , lo que implica que la relación en la Ecuación 2.28 se reduzca a:

$$dp = \rho g \cos \alpha_s ds - \rho g \cos \alpha_n dn \quad (2.29)$$

Integrando desde el origen a un punto  $(s, n)$ , considerando que en el origen  $p = p_o$ , se obtiene:

$$p - p_o = \rho g \cos \alpha_s s - \rho g \cos \alpha_n n \quad (2.30)$$

Por consiguiente

$$p = p_o + \rho g \cos \alpha_s s - \rho g \cos \alpha_n n \quad (2.31)$$

Dada la existencia de una superficie libre en  $n = n'$ , donde la presión  $p = p_a = 0$ , la Ecuación 2.31 se expresa como:

$$p_o = \rho g \cos \alpha_n n' - \rho g \cos \alpha_s s \quad (2.32)$$

Sustituyendo (2.32) en (2.31) se obtiene:

$$\begin{aligned} p &= \rho g \cos \alpha_n n' - \rho g \cos \alpha_n n \\ p &= \rho g \cos \alpha_n (n' - n) \end{aligned} \quad (2.33)$$

En la **Figura 2.7** se observa que  $d = n' - n$ , donde  $d$  es el tirante al punto de interés, medido a partir de la superficie libre sobre el eje  $n$ , por lo tanto:

$$p = \rho g d \cos \alpha_n \quad (2.34)$$

En la misma figura se muestra que  $d = h \cos \alpha_n$ , por lo que:

$$p = \rho g h \cos^2 \alpha_n \quad (2.35)$$

Es interesante notar que para un canal horizontal ( $\alpha_n = 0$ ) resulta

$$p = \rho g h$$

la cual corresponde a la misma ley de distribución de presiones hidrostática obtenida para el caso de un líquido en reposo absoluto. Este resultado ha influido notablemente en la ingeniería práctica a tal grado que se ha adoptado como aceptable para evaluar la distribución de presiones en diversos problemas de la hidráulica de canales. Esta suposición es aceptable desde el punto de vista práctico siempre y cuando  $\alpha_n$  efectivamente sea pequeño, es decir,  $\cos^2 \alpha_n \cong 1$ .



$$dp = \rho g \left( \cos \alpha_s - \frac{a_s}{g} \right) ds + \rho g \left( -\cos \alpha_n - \frac{a_n}{g} \right) dn - \rho g \left( -\cos \alpha_b - \frac{a_b}{g} \right) db$$

$$dp = \rho g \left( \cos \alpha_s - \frac{a_s}{g} \right) ds - \rho g \cos \alpha_n dn - \rho g \cos \alpha_b db$$

Como se puede apreciar en la **Figura 2.8**, la dirección de la coordenada  $b$  coincide con un eje horizontal y por lo tanto  $\cos \alpha_b = 0$ , por lo que la relación anterior se reduce a:

$$dp = \rho g \left( \cos \alpha_s - \frac{a_s}{g} \right) ds - \rho g \cos \alpha_n dn$$

Sustituyendo  $a_s = \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{v^2}{2} \right)$

$$dp = \rho g \left( \cos \alpha_s - \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{v^2}{2} \right) \right) ds - \rho g \cos \alpha_n dn$$

Integrando

$$p = \rho g \cos \alpha_s s - \rho g \left( \frac{v^2}{2g} \right)_{(s,n)} - \rho g \cos \alpha_n n + C$$

Aquí  $C$  corresponde a la constante de integración.

Aplicando en el origen  $(0,0)$ , en donde  $p = p_0$ , se obtiene:

$$p_0 = -\rho g \left( \frac{v^2}{2g} \right)_{(0,0)} + C$$

de donde

$$C = p_0 + \rho g \left( \frac{v^2}{2g} \right)_{(0,0)}$$

Sustituyendo en la anterior

$$p = \rho g \cos \alpha_s s - \rho g \left( \frac{v^2}{2g} \right)_{(s,n)} - \rho g \cos \alpha_n n + p_0 + \rho g \left( \frac{v^2}{2g} \right)_{(0,0)}$$

$$p = p_0 + \rho g \cos \alpha_s s - \rho g \left( \frac{v^2}{2g} \right)_{(s,n)} + \rho g \left( \frac{v^2}{2g} \right)_{(0,0)} - \rho g \cos \alpha_n n$$

Aplicando en la superficie libre, en donde  $p = p_a = 0$  y  $n = n'$ , y despejar  $p_0$  resulta

$$p_0 = -\rho g \cos \alpha_s s + \rho g \left(\frac{v^2}{2g}\right)_{(s,n')} - \rho g \left(\frac{v^2}{2g}\right)_{(0,0)} + \rho g \cos \alpha_n n'$$

Sustituyendo esta última expresión en la anterior

$$p = -\rho g \cos \alpha_s s + \rho g \left(\frac{v^2}{2g}\right)_{(s,n')} - \rho g \left(\frac{v^2}{2g}\right)_{(0,0)} + \rho g \cos \alpha_n n' + \rho g \cos \alpha_s s - \rho g \left(\frac{v^2}{2g}\right)_{(s,n)} + \rho g \left(\frac{v^2}{2g}\right)_{(0,0)} + \rho g \cos \alpha_n n$$

Simplificando

$$p = \rho g \cos \alpha_s (n' - n) + \rho g \left(\frac{v^2}{2g}\right)_{(s,n')} - \rho g \left(\frac{v^2}{2g}\right)_{(s,n)}$$

Si el flujo se desplazara como un sólido todas las partículas tendrían la misma velocidad y en consecuencia la ecuación anterior se reduciría a:

$$p = \rho g \cos \alpha_s (n' - n)$$

Cuando  $n = 0$ , es decir, se ubica en el fondo del canal, resulta apropiado adoptar  $d = n' - 0$ , término conocido como tirante, se obtiene

$$p = \rho g \cos \alpha_n d$$

expresión igual a la obtenida para flujo uniforme.

Desde otro enfoque, al establecer la hipótesis de que las partículas en contacto con las paredes que contienen al flujo no se desplazan, y asumiendo que se mantiene la misma constante de integración entre dos líneas de corriente dentro del seno del flujo, al aplicar la ecuación al fondo del canal ( $s, n = 0$ ) con  $d = n' - 0$  y  $\left(\frac{v^2}{2g}\right)_{(s,n)} = \left(\frac{v^2}{2g}\right)_{(s,0)} = 0$ , resulta:

$$p = \rho g \cos \alpha_n d + \rho g \left(\frac{v^2}{2g}\right)_{(s,n')}$$

Una relación semejante es aplicable para el caso en que se introduce un tubo de Pitot en un canal a una profundidad "perpendicular"  $d_n = n' - n$ , en donde  $n$  puede o no coincidir con el fondo del canal. Lo anterior se explica al asumir que por efecto estacionario del punto de medición del tubo de Pitot, resulta que  $\left(\frac{v^2}{2g}\right)_{(s,n)} = 0$  y consecuentemente la ecuación se reduce a:

$$p = \rho g \cos \alpha_n d_n + \rho g \left(\frac{v^2}{2g}\right)_{(s,n')}$$

Si por hipótesis simplificatoria se considera que, en una sección transversal todas las partículas, con excepción de las colindantes con las paredes, mantienen una misma carga de velocidad, a la cual se designará como  $\left(\frac{v^2}{2g}\right)_m$ , y que se mueven con una

velocidad igual a su velocidad media  $u$ , de tal forma que  $\left(\frac{v^2}{2g}\right)_m \approx \alpha \frac{u^2}{2g}$ ; entonces las ecuaciones anteriores pueden ser expresadas de la siguiente manera:

$$p = \rho g \cos \alpha_n d + \rho g \alpha \frac{u^2}{2g}$$

y

$$p = \rho g \cos \alpha_n d_n + \rho g \alpha \frac{u^2}{2g}$$

El factor  $\alpha$  se conoce como coeficiente de Coriolis; suele tener un valor cercano a la unidad y actúa como factor de corrección al utilizar la carga asociada a la velocidad media  $\alpha \frac{u^2}{2g}$  en lugar de la carga de velocidad media  $\left(\frac{v^2}{2g}\right)_m$ , es decir, se asume la igualdad  $\left(\frac{v^2}{2g}\right)_m = \alpha \frac{u^2}{2g}$

$$p = \rho g \cos \alpha_n d_n + \rho g \alpha \frac{u^2}{2g}$$

De manera particular, al despejar  $u$  de esta última expresión y considerar que, de acuerdo con diferentes investigadores, a la “profundidad”  $d_n = 0.6d$  se presenta, con cierto nivel de aproximación, la velocidad media sobre una sección perpendicular de ancho unitario, se obtiene:

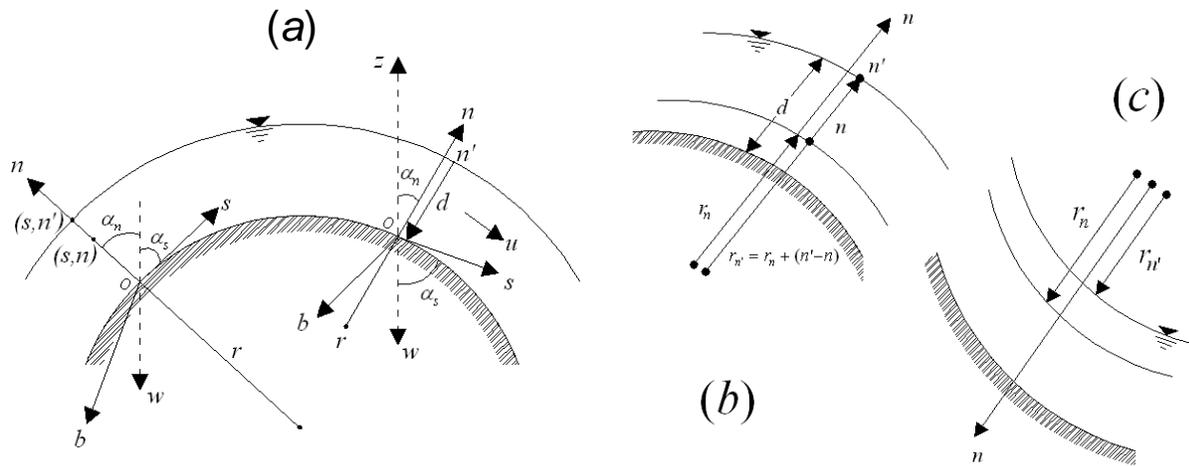
$$u = \sqrt{\frac{2g(p - \rho g \cos \alpha_n 0.6d)}{\rho g \alpha}}$$

$$u = \sqrt{\frac{2g}{\alpha} \left( \frac{p}{\gamma_o} - \cos \alpha_n 0.6d \right)}$$

Con esta expresión se puede obtener una primera aproximación de la velocidad media. En el caso de que se disponga de un tubo de Pitot, la relación  $\frac{p}{\gamma_o}$  se obtiene directamente de la lectura que arroja al ubicarlo a la “profundidad” perpendicular  $0.6d$ . Para lograr una mayor precisión, en la práctica esta ecuación se afecta por un factor de corrección que se debe determinar mediante calibración local o experimental, por lo que tiene validez local.

### 2.6 Distribución de presiones en un canal con curvatura vertical con flujo uniforme

En este caso se supone que el flujo es unidimensional, que  $\cos \alpha_s$  y  $\cos \alpha_n$  son variables y que  $\cos \alpha_b = 0$  permanece constante, ya que  $\alpha_b = 90^\circ$ . El hecho de que  $\alpha_s$  sea variable implica que el eje  $s$  cambia de dirección de un punto a otro y, por lo tanto, la coordenada curvilínea  $s$  posee un cierto radio de curvatura en cada lugar geométrico o punto de la misma, el cual está dirigido en la dirección normal  $n$  (**Figura 2.9**). De aquí resulta la existencia de una aceleración centrípeta que está dirigida hacia el centro de la curvatura y coincide con la dirección de la coordenada normal.



**Figura 2.9** Flujo en un canal con curvatura vertical

De acuerdo con lo indicado anteriormente, la Ecuación 2.6 se reduce a:

$$dp = \rho g \cos \alpha_s ds - \rho g \left( \cos \alpha_n + \frac{a_n}{g} \right) dn \tag{2.36}$$

Esto implica que el flujo se desarrolla en el plano osculador, es decir en un sistema bidimensional de coordenadas naturales, y que la única aceleración que se presenta se debe a la aceleración centrípeta (Ecuación 1.19):

$$a_n = -\frac{v_s^2}{r}$$

Sustituyendo en (2.36)

$$dp = \rho g \cos \alpha_s ds - \rho g \left( \cos \alpha_n - \frac{v_s^2}{gr} \right) dn \quad (2.37)$$

Si se supone que  $v_s = Ce r^m$ , relación comúnmente utilizada para describir la velocidad angular en vórtices (Streeter y Wylie, 1979), resulta:

$$dp = \rho g \cos \alpha_s ds - \rho g \left( \cos \alpha_n - \frac{Ce^2 r^{2m-1}}{g} \right) dn \quad (2.38)$$

Integrando, considerando  $Ce = \text{constante}$ , entre los límites  $0-s$ ,  $0-n$  y considerando  $p = p_o$  en el origen, así como  $dr = dn$

$$p - p_o = \rho g \int_0^s \cos \alpha_s ds - \rho g \int_0^n \cos \alpha_n dn + \rho g \frac{Ce^2}{2gm} (r_n^{2m} - r_o^{2m}) \quad (2.39)$$

Por consiguiente

$$p = p_o + \rho g \int_0^s \cos \alpha_s ds - \rho g \int_0^n \cos \alpha_n dn + \rho g \frac{Ce^2}{2gm} (r_n^{2m} - r_o^{2m}) \quad (2.40)$$

Y dada la existencia de un punto de superficie libre en  $n = n'$  donde  $p = p_a = 0$ , la Ecuación 2.40 se expresa como

$$p_o = -\rho g \int_0^s \cos \alpha_s ds + \rho g \int_0^{n'} \cos \alpha_n dn - \rho g \frac{Ce^2}{2gm} (r_n'^{2m} - r_o^{2m}) \quad (2.41)$$

Sustituyendo (2.41) en (2.40)

$$p = \rho g \left[ \int_0^{n'} \cos \alpha_n dn - \int_0^n \cos \alpha_n dn \right] + \rho g \frac{Ce^2}{2gm} (r_n^{2m} - r_n'^{2m})$$

$$p = \rho g \left[ \int_n^{n'} \cos \alpha_n dn \right] + \rho g \frac{Ce^2}{2gm} (r_n^{2m} - r_n'^{2m})$$

Nótese que esta ecuación permite evaluar la distribución de presiones en la dirección normal, a lo largo de la cual  $\alpha_n$  es constante, por lo que al integrar resulta:

$$p = \rho g \cos \alpha_n (n' - n) + \rho g \frac{Ce^2}{2gm} (r_n^{2m} - r_{n'}^{2m})$$

Si la velocidad media  $u$  del flujo en la dirección  $s$  entre las secciones  $n_o - n'$  está dada por

$$u = \frac{1}{d} \int_{n_o}^{n'} v_s \, dn = \frac{1}{d} \int_{n_o}^{n'} Ce \, r^m \, dn$$

donde se ha tomado en cuenta que  $d = n' - n$ .

Para realizar esta integración se recurre a la relación  $dn = dr$ , por lo que resulta

$$u = \frac{Ce}{d} \left[ \frac{r_n^{m+1} - r_{n_o}^{m+1}}{m+1} \right] \quad (2.42)$$

Despejando  $Ce$

$$Ce = \frac{d(m+1)u}{r_n^{m+1} - r_{n_o}^{m+1}} \quad (2.43)$$

Sustituyendo (2.43) en (2.41):

$$p = pg(n' - n) \cos \alpha_n + pg \frac{(m+1)^2 d^2 u^2}{2gm} \frac{(r_n^{2m} - r_{n'}^{2m})}{(r_n^{m+1} - r_{n_o}^{m+1})^2} \quad (2.44)$$

Asignando  $Km = \frac{(m+1)^2}{m}$ , resulta

$$p = pg(n' - n) \cos \alpha_n + pg \, Km \frac{d^2 u^2}{2g} \frac{(r_n^{2m} - r_{n'}^{2m})}{(r_n^{m+1} - r_{n_o}^{m+1})^2} \quad (2.45)$$

Esta ecuación permite evaluar la presión en un punto ubicado en la posición  $n$ , es decir, permite conocer la distribución de presiones a lo largo de  $n$ . Si lo que interesa es evaluar la presión en el fondo, en donde se cumple  $d = n' - n$ ,  $r_{n'} = r_n + d$ , se obtiene:

$$p = pg \, d \cos \alpha_n + pg \, Km \frac{d^2 u^2}{2g} \frac{[r_n^{2m} - (r_n + d)^{2m}]}{[(r_n + d)^{m+1} - r_n^{m+1}]^2} \quad (2.46)$$

Esta relación permite evaluar la presión en un punto ubicado sobre el fondo, a la profundidad  $d$ , medida a partir de la superficie libre sobre el eje  $n$  (**Figura 2.9a**).

En aquellos casos en los que la magnitud de la velocidad puntual aumenta linealmente en la dirección radial, para fines prácticos se puede considerar  $m = 1$ , por ejemplo, para calcular presiones sobre cimacios (Chow, 1982) con lo que (2.46) se simplifica y resulta:

$$p = \rho g d \cos \alpha_n - \rho g \frac{2d u^2}{g(2r_n + d)} \quad (2.47)$$

Las relaciones (2.46) y (2.47) son válidas para los casos en los que la curvatura sea convexa (**Figura 2.9b**). Para el caso de curvatura cóncava (**Figura 2.9c**), el término correspondiente al incremento de presión, debido a la aceleración centrípeta, adquirirá signo positivo, con lo que resulta:

$$p = \rho g d \cos \alpha_n - \rho g Km \frac{d^2 u^2}{2g} \frac{[r_n^{2m} - (r_n + d)^{2m}]}{[(r_n + d)^{m+1} - r_n^{m+1}]^2} \quad (2.48)$$

Y para el caso simplificado con  $m = 1$

$$p = \rho g d \cos \alpha_n + \rho g \frac{2d u^2}{g(2r_n + d)} \quad (2.49)$$

## 2.7 Distribución de presiones en un canal con curvatura horizontal con flujo uniforme

Se considera flujo unidimensional en la dirección  $s$ , de aquí que el eje  $n$  sea horizontal y se desarrolle sobre la dirección del radio de curvatura y que el eje binormal  $b$  sea perpendicular al plano formado por los ejes  $s$  y  $n$ . Bajo estas condiciones se concluye que  $\cos \alpha_s$  y  $\cos \alpha_b$  son variables a medida que cambia  $s$  y que el  $\cos \alpha_n$  resulta igual a cero, por ser  $n$  perpendicular a la dirección de acción de la fuerza de gravedad  $w$  (**Figura 2.10**). De esta manera, la única componente de la aceleración que actúa sobre el sistema es la centrípeta  $a_n$  debido al efecto de curvatura.

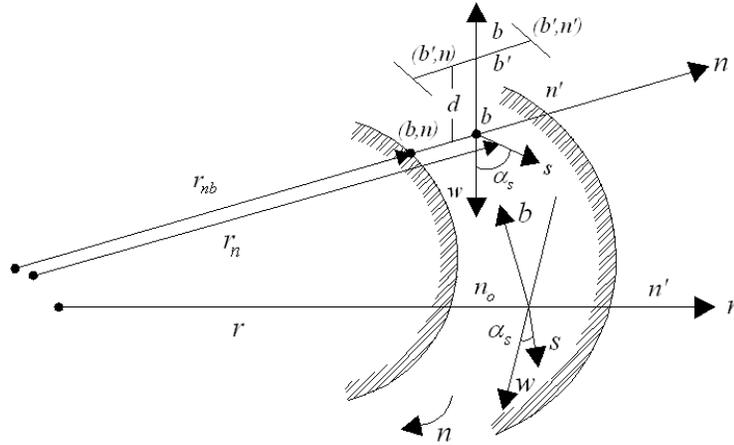


Figura 2.10 Flujo en un canal con curvatura horizontal

Al asumir lo anterior, la Ecuación 2.6 se simplifica y se obtiene:

$$dp = \rho g \cos \alpha_s ds - \rho g \frac{a_n}{g} dn - \rho g \cos \alpha_b db \tag{2.50}$$

De la Ecuación 1.19 se tiene

$$a_n = -\frac{v_s^2}{r}$$

Por lo que (2.50) resulta igual a:

$$dp = \rho g \cos \alpha_s ds + \rho g \frac{v_s^2}{gr} dn - \rho g \cos \alpha_b db$$

Si se considera que la variación de la velocidad en la dirección normal se apega a la relación  $v_s = Ce r^m$ , resulta:

$$dp = \rho g \cos \alpha_s ds + \rho g \frac{Ce^2 r^{2m-1}}{g} dn - \rho g \cos \alpha_b db$$

Integrando desde el origen al punto  $(s, n, b)$ , para lo cual se toma en cuenta que  $dn = dr$  y  $p = p_o$  en  $(0, 0, 0)$ , se obtiene:

$$p = p_o + \rho g \int_0^s \cos \alpha_s ds + \rho g \frac{Ce^2}{2gm} (r_n^{2m} - r_o^{2m}) - \rho g \int_0^b \cos \alpha_b db \tag{2.51}$$

Dada la existencia de una superficie libre en  $b = b'$ ;  $n = n'$  donde;  $p = p_{atm} = 0$ , la Ecuación 2.51 se simplifica y se expresa como:

$$p_o = -\rho g \int_o^s \cos \alpha_s ds - \rho g \frac{C_e^2}{2gm} (r_{n'}^{2m} - r_o^{2m}) + \rho g \int_o^{b'} \cos \alpha_b db \quad (2.52)$$

Sustituyendo (2.52) en (2.51)

$$p_o = \rho g \frac{C_e^2}{2gm} (r_n^{2m} - r_{n'}^{2m}) + \rho g \int_b^{b'} \cos \alpha_b db \quad (2.53)$$

Nótese que esta ecuación es independiente de  $s$  y por tanto permite evaluar la presión en un plano  $n, b$  en el cual  $\cos \alpha_b$  es constante, ya que corresponde a un valor constante de la coordenada  $s$ .

Esta observación permite integrar directamente (2.53), con lo que resulta:

$$p = \rho g \frac{C_e^2}{2gm} (r_n^{2m} - r_{n'}^{2m}) + \rho g \cos \alpha_b (b' - b) \quad (2.54)$$

Por otra parte, la velocidad media  $u$  del flujo en la dirección  $s$  entre las secciones  $n_o - n'$  está dada por

$$u = \frac{1}{n' - n_o} \int_{n_o}^{n'} v_s dn = \frac{1}{n' - n_o} \int_{n_o}^{n'} C_e r^m dn \quad (2.55)$$

Con  $dn = dr$  y  $n' - n_o = r_{n'} - r_{n_o}$ , al integrar, se tiene

$$u = \frac{C_e}{r_{n'} - r_{n_o}} \left[ \frac{r_{n'}^{m+1} - r_{n_o}^{m+1}}{m+1} \right] \quad (2.56)$$

Despejando  $C_e$

$$C_e = \frac{(m+1)(r_{n'} - r_{n_o}) u}{r_{n'}^{m+1} - r_{n_o}^{m+1}} \quad (2.57)$$

Sustituyendo (2.57) en (2.54)

$$p = \rho g \cos \alpha_b (b' - b) + \rho g \frac{u^2}{2gm} \frac{(m+1)^2 (r_{n'} - r_{n_o})^2}{(r_{n'}^{m+1} - r_{n_o}^{m+1})^2} (r_n^{2m} - r_{n'}^{2m}) \quad (2.58)$$

Esta ecuación permite evaluar la presión sobre una partícula, ubicada en una posición  $n$  y a una profundidad  $b$  medida a partir de la superficie libre  $b'$  sobre el eje  $b$ . Para el caso particular en que se desee calcular la presión en el fondo suponiendo  $m = 1$ , se cumple  $d = b' - b$  (83) se reduce a:

$$p = \rho g d \cos \alpha_b + \rho g \frac{2u^2}{g} \frac{(r_{n_o} - r_{n'})}{(r_{n'} + r_{n_o})} \quad (2.59)$$

## 2.8 Distribución de presiones en un canal con cierto grado de curvatura (caso general)

Tal como se pudo apreciar en los últimos dos incisos, el efecto de curvatura produce un incremento de la presión debido a la aceleración centrípeta que surge por esta causa. De esta manera, asumiendo que  $\cos \alpha_n = \cos \alpha_b = \text{sen} \alpha_s$  (ver **Figuras 2.9 y 2.10**), para los casos de curvatura vertical y horizontal se demostró que:

### Caso de curvatura vertical

De la Ecuación 2.44, tomando en cuenta que

$$d = n' - n_o = r_{n'} - r_{n_o}$$

se tiene

$$p = \rho g d \text{sen} \alpha_s \pm \rho g \frac{u^2}{2gm} \frac{(m+1)^2 (r_{n'} - r_{n_o})^2}{(r_{n'}^{m+1} - r_{n_o}^{m+1})^2} (r_n^{2m} - r_{n'}^{2m}) \quad (2.60)$$

en donde el signo depende del tipo de curvatura.

### Caso de curvatura horizontal

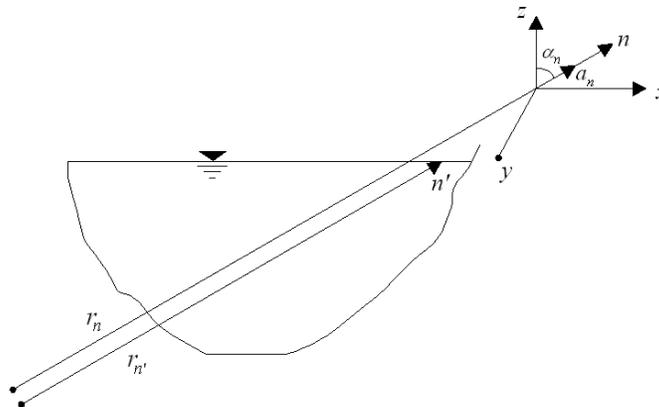
De la Ecuación 2.58, tomando en cuenta que  $d = b' - b$ , se tiene

$$p = \rho g d \operatorname{sen} \alpha_s + \rho g \frac{u^2}{2gm} \frac{(m+1)^2 (r_n' - r_{n_o})^2}{(r_n^{m+1} - r_{n_o}^{m+1})^2} (r_n^{2m} - r_n'^{2m})$$

Al comparar estas dos últimas expresiones se observa que son muy parecidas, salvo la particularidad de que varía el signo del segundo término en caso de que la curvatura vertical sea cóncava. De aquí se reafirma que la existencia de curvatura produce un incremento de presión con respecto a la presión correspondiente a flujo uniforme. Recuérdese que en un flujo uniforme (considerando en la Ecuación 2.34  $\cos \alpha_n = \operatorname{sen} \alpha_s$ ), la presión se puede evaluar con la relación

$$p = \rho g d \operatorname{sen} \alpha_s \quad (2.61)$$

Una manera adecuada de determinar el incremento de presión por efecto de curvatura se obtiene considerando la aceleración centrípeta que actúa en el líquido como una aceleración lineal uniforme que está proyectada sobre la dirección radial (**Figura 2.11**).



**Figura 2.11** Aceleración normal

De acuerdo con lo visto en el inciso referente a aceleración lineal uniforme y con base en la Ecuación 2.13 se cumple

$$dp = \rho a_x dx + \rho g \left( 1 + \frac{a_z}{g} \right) dz$$

De la **Figura 2.11** se tiene

$$a_x = a_n \operatorname{sen} \alpha_n$$

$$a_z = a_n \operatorname{cos} \alpha_n$$

Por lo tanto, al reemplazar en la ecuación anterior, resulta:

$$dp = \rho a_n \operatorname{sen} \alpha_n dx + \rho g \left( 1 + \frac{a_n \operatorname{cos} \alpha_n}{g} \right) dz$$

Como solo se necesita conocer el incremento de presión por efecto de curvatura, la ecuación anterior se reduce a

$$d(\Delta p) = \rho a_n \operatorname{sen} \alpha_n dx + \rho a_n \operatorname{cos} \alpha_n dz \quad (2.62)$$

si

$$dx = dr \operatorname{sen} \alpha_n$$

$$dz = dr \operatorname{cos} \alpha_n$$

se obtiene

$$d(\Delta p) = \rho (\operatorname{sen}^2 \alpha_n + \operatorname{cos}^2 \alpha_n) a_n dr$$

Tomando en cuenta que

$$a_n = -\frac{v_s^2}{r} = -C e^2 r_n^{2m-1}$$

y

$$\operatorname{sen}^2 \alpha_n + \operatorname{cos}^2 \alpha_n = 1$$

resulta

$$d(\Delta p) = -\rho C e^2 r_n^{2m-1} dr$$

Integrando entre los límites ( $r_n$  a  $r_{n'}$ )

$$\Delta p = -\rho C e^2 \left( \frac{r_{n'}^{2m} - r_n^{2m}}{2m} \right) + C \quad (2.63)$$

Por otra parte, la velocidad media está dada por

$$u = \frac{Ce}{r_{n'} - r_{n_o}} \left[ \frac{r_{n'}^{m+1} - r_{n_o}^{m+1}}{m+1} \right] \quad (2.64)$$

Despejando  $Ce$

$$Ce = \frac{(m+1)(r_{n'} - r_{n_o})u}{r_{n'}^{m+1} - r_{n_o}^{m+1}} \quad (2.65)$$

Sustituyendo (2.65) en (2.63)

$$\Delta p = \rho g \frac{u^2}{2gm} \frac{(m+1)^2 (r_{n'} - r_{n_o})^2}{(r_{n'}^{m+1} - r_{n_o}^{m+1})^2} (r_n^{2m} - r_{n'}^{2m}) \quad (2.66)$$

Agregando este incremento de presión a la Ecuación 2.61 se obtiene:

$$p = \rho g d \operatorname{sen} \alpha_s + \rho g \frac{u^2}{2gm} \frac{(m+1)^2 (r_{n'} - r_{n_o})^2}{(r_{n'}^{m+1} - r_{n_o}^{m+1})^2} (r_n^{2m} - r_{n'}^{2m})$$

De este resultado se concluye que la distribución de presiones en un canal con curvatura se puede calcular con auxilio de la relación general siguiente:

$$p = \rho g d \operatorname{sen} \alpha_s \pm \rho g \frac{u^2}{2gm} \frac{(m+1)^2 (r_{n'} - r_{n_o})^2}{(r_{n'}^{m+1} - r_{n_o}^{m+1})^2} (r_n^{2m} - r_{n'}^{2m}) \quad (2.67)$$

Para aplicar esta relación se deberá tener cuidado con el signo, el cual depende del tipo de curvatura que se tiene en el canal.

## 2.9 Estimación de la presión a partir de las ecuaciones de Euler

### 2.9.1 Ecuaciones de Euler en coordenadas curvilíneas

De la **Figura 2.1** se observa que se satisfacen las siguientes relaciones:

$$\cos \alpha_s = -\frac{\partial z}{\partial s}$$

$$\cos \alpha_n = \frac{\partial z}{\partial n}$$

$$\cos \alpha_b = \frac{\partial z}{\partial b}$$

Si adicionalmente se asume que el desarrollo de la profundidad  $h$  coincide con la dirección de  $z$ , pero con sentido contrario, resulta que se satisfacen las relaciones  $\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial s}$ ,  $\frac{\partial h}{\partial b} = \frac{\partial z}{\partial b}$  y  $\frac{\partial h}{\partial n} = -\frac{\partial z}{\partial n}$ . Esto es debido a que  $h$  se mide desde un punto u origen expuesto a la presión atmosférica, que en el caso de los canales coincide con la superficie libre del agua, hasta el punto de interés en que se desea evaluar la presión  $p$  en el seno del sistema en estudio, el cual coincide con el origen de las coordenadas. Bajo este marco de referencia se satisfacen las relaciones siguientes:

$$\cos \alpha_s = -\frac{\partial h}{\partial s}$$

$$\cos \alpha_n = -\frac{\partial h}{\partial n}$$

$$\cos \alpha_b = \frac{\partial h}{\partial b}$$

Al adoptar estas expresiones, las ecuaciones (2.2), (2.3) y (2.4) se pueden reescribir en la forma:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial s} (p + \rho gh) = a_s \quad (2.68)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial n} (p - \rho gh) = a_n \quad (2.69)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial b} (p + \rho gh) = a_b \quad (2.70)$$

Considerando coordenadas naturales (tangencial  $s$ , normal  $n$  y binormal  $b$ ) y de acuerdo con las relaciones (1.19), (1.21), (1.22) y (1.23), las ecuaciones (2.68) a (2.70) resultan ser las que se presentan de (2.71) a (2.73), y que constituyen las ecuaciones de Euler en coordenadas naturales o curvilíneas.

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial s} (p + \rho gh) = \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{v^2}{2} \right) + \frac{\partial v}{\partial t} \quad (2.71)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial n} (p - \rho gh) = \frac{v^2}{r} \quad (2.72)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial b} (p + \rho gh) = 0 \quad (2.73)$$

Si en estas ecuaciones se consideran nulos los términos de aceleración local y convectiva, y el radio de curvatura tiende a infinito  $r \rightarrow \infty$ , es decir, se trata de un sistema plano o de pendiente constante, al resolver la Ecuación 2.72, entre un punto ubicado sobre la superficie libre (expuesto a la presión atmosférica  $p_a = 0$ ) y otro ubicado a la profundidad  $h$ , se satisface en general la relación  $p = \rho gh$ . Dado que  $h$  corresponde a la profundidad del centro de los ejes coordenados, la ubicación del punto de interés (en el que se determina  $p$ ) corresponde al origen del eje  $z$  (**Figura 2.7**).

Por otra parte, al considerar un flujo permanente  $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$  y que no haya efectos derivados de la curvatura  $r \rightarrow \infty$ , al retomar la relación  $\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial h}{\partial s}$ , asignar  $\gamma = \rho g$  e integrar la Ecuación 2.71 en la dirección  $s$ , se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{p}{\gamma} + z + \frac{v^2}{2g} \right) = 0$$

expresión comúnmente conocida como ecuación de Bernoulli, que al ser integrada con respecto a  $s$  entre las posiciones  $s_i$  a  $s_{i+1}$ , resulta:

$$\left( \frac{p}{\gamma} + z + \frac{v^2}{2g} \right)_{s_{i+1}} = \left( \frac{p}{\gamma} + z + \frac{v^2}{2g} \right)_{s_i}$$

De esta manera, la ecuación de Bernoulli establece que a lo largo de una línea de corriente que siga la trayectoria  $s$ , la suma de las cargas de presión  $\frac{p}{\gamma}$ , de posición  $z$  y de velocidad  $\frac{v^2}{2g}$ , se mantiene constante, lo que satisface el principio básico de la ecuación de la energía dentro de un sistema en el que no existe adición o pérdida de la misma.

### 2.9.2 Ecuaciones de Euler en coordenadas rectangulares

A partir de las ecuaciones (2.68), (2.69) y (2.70) se pueden obtener rápidamente las tradicionales ecuaciones de Euler para coordenadas cartesianas. Para esto, se designan como  $u$ ,  $v$  y  $w$  las componentes de velocidad en cada una de las direcciones coordenadas, de tal manera que se cumple

$$a_s = \frac{du}{dt}$$

$$a_n = \frac{dv}{dt}$$

$$a_b = \frac{dw}{dt}$$

y por definición de derivada total

$$a_s = \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.74)$$

$$a_s = u \frac{\partial u}{\partial s} + v \frac{\partial u}{\partial n} + w \frac{\partial u}{\partial b} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

Y bajo el mismo precepto también se obtiene

$$a_n = u \frac{\partial v}{\partial s} + v \frac{\partial v}{\partial n} + w \frac{\partial v}{\partial b} + \frac{\partial v}{\partial t} \quad (2.75)$$

$$a_b = u \frac{\partial w}{\partial s} + v \frac{\partial w}{\partial n} + w \frac{\partial w}{\partial b} + \frac{\partial w}{\partial t} \quad (2.76)$$

sustituyendo (2.74), (2.75) y (2.76) en (2.68), (2.69) y (2.70), resulta

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial s} (p + \rho gh) = u \frac{\partial u}{\partial s} + v \frac{\partial u}{\partial n} + w \frac{\partial u}{\partial b} + \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.77)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial n} (p - \rho gh) = u \frac{\partial v}{\partial s} + v \frac{\partial v}{\partial n} + w \frac{\partial v}{\partial b} + \frac{\partial v}{\partial t} \quad (2.78)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial b} (p + \rho gh) = u \frac{\partial w}{\partial s} + v \frac{\partial w}{\partial n} + w \frac{\partial w}{\partial b} + \frac{\partial w}{\partial t} \quad (2.79)$$

Estas ecuaciones representan las tradicionales ecuaciones de Euler. Su presentación para coordenadas cartesianas  $x$ ,  $y$  y  $z$  se obtiene sustituyendo  $x = s$ ,  $y = n$  y  $z = b$  en las mismas. Si en estas ecuaciones se consideran nulos los términos de aceleración local y convectiva, como en el caso de un flujo uniforme tridimensional, al resolver la Ecuación 2.78 entre el origen de coordenadas y un punto ubicado sobre una superficie libre ( $h = 0$ ) expuesta a la presión atmosférica ( $p_a = 0$ ), se obtiene:

$$p = \rho g h$$

En donde  $h$  representa la profundidad o distancia medida verticalmente desde un punto expuesto a la presión atmosférica al centro de los ejes coordenados (**Figuras 2.3 y 2.7**). En el campo de la ingeniería hidráulica se asume que esta relación es válida para evaluar la distribución de presiones en un flujo uniforme tridimensional; esta característica ha sido adoptada por diversos autores para calcular aproximadamente la distribución de presiones en un flujo real, y se han encontrado resultados satisfactorios en diversos problemas de interés práctico (Daily y Harleman, 1981).

**Ecuaciones fundamentales**

**3**



## Capítulo 3

### Ecuaciones fundamentales

**C**ualquier cuerpo es, en esencia, un sistema de puntos materiales o de partículas. Si el sistema varía en el transcurso del tiempo, se dice que cambia su estado. El estado de un sistema se puede caracterizar por la fijación simultánea de las posiciones y de las velocidades de todas sus partículas. Conociendo las leyes de las fuerzas que actúan sobre las partículas y el estado del sistema en un tiempo inicial, con la ayuda de las ecuaciones del movimiento se puede predecir su comportamiento ulterior, es decir, determinar el estado del sistema en cualquier instante.

Sin embargo, se debe prever que en algunos sistemas coordinados y bajo ciertas condiciones, la representación y el estudio detallado del comportamiento de un sistema a través de las ecuaciones del movimiento, se puede tornar tan complejo que plantear y lograr su solución llega a ser prácticamente imposible. Además, cuando las leyes de las fuerzas actuantes se desconocen o no se representan adecuadamente, la descripción físico-matemática del sistema resulta inapropiada e incompleta. Aunado a lo anterior, al representar un sistema se debe considerar que existen problemas en los que el examen detallado del movimiento de las partículas aisladas no es relevante, como suele ocurrir en el caso del estudio del comportamiento de un gas.

Algunos principios generales que son corolarios de las leyes de Newton y que permiten abordar de otro modo la solución del problema, ayudando a evitar las dificultades anteriormente señaladas son los constituidos por las leyes de conservación. Estas leyes pertenecen a los principios fundamentales de la física y su aplicación va más allá de los límites de la mecánica, ya que se constituyen y reconocen como leyes fundamentales de la naturaleza. Hasta ahora no se ha descubierto ningún fenómeno donde estas leyes no se cumplen (Airodov, 1981). De esta manera, las leyes de conservación se han convertido en un instrumento indispensable para la investigación científica y tecnológica, así como para caracterizar y solucionar fenómenos y problemas de la física-matemática, como en el caso particular de la hidráulica y la mecánica de fluidos.

### 3.1 Ecuación general de conservación de una propiedad

#### 3.1.1 Sistema y volumen de control

Un sistema se puede ver como una masa bien definida de un cuerpo o materia que se distingue claramente de sus alrededores. Las fronteras de un sistema forman una

---

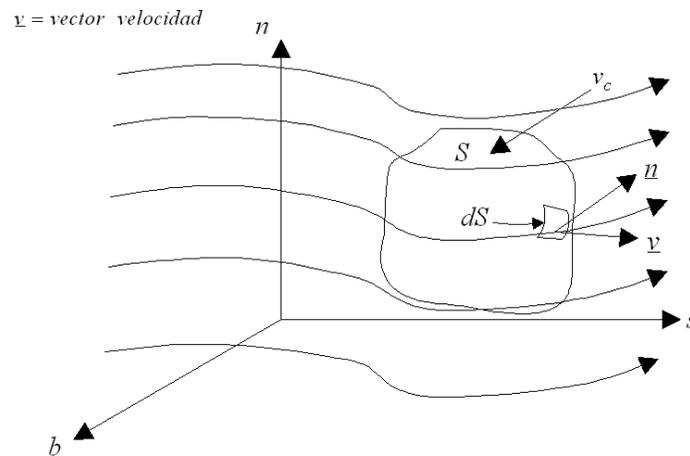
superficie cerrada que puede cambiar en el tiempo con la condición de que siempre contenga la misma masa, es decir, que se cumpla la relación:

$$\frac{dm}{dt} = 0 \quad (3.1)$$

El volumen de control se refiere a una región en el espacio a través de cuyas fronteras entra y sale continuamente un flujo de una propiedad física. La frontera de un volumen de control se llama superficie de control. Este marco de referencia es la base para deducir una ley general del balance de una propiedad física. Esta ley se representa a partir del establecimiento de una relación entre los conceptos de sistema y volumen de control asociados a la conservación de una propiedad intensiva. Así, por ejemplo, en los campos de la ingeniería hidráulica y de la mecánica de fluidos, la aplicación del concepto de conservación de una propiedad intensiva da origen a la deducción de las ecuaciones de conservación de masa y de cantidad de movimiento.

### 3.1.2 Ecuación general de balance de la propiedad

Sea  $\rho$  la densidad (masa/volumen) de un sistema fluido y  $q$  la cantidad de una propiedad intensiva, escalar y arbitraria por unidad de masa del sistema ( $q = \text{propiedad}/\text{masa}$ ). La cantidad de la propiedad en cuestión por unidad de volumen está dada por el producto  $\rho q$  ( $q = \text{propiedad}/\text{volumen}$ ). Considérese ahora un volumen de control  $V_c$  localizado en el seno de un fluido, tal y como se muestra en la **Figura 3.1**.



**Figura 3.1** Sistema y volumen de control

Si  $dS$  es un elemento de la superficie de control  $S$  (que cubre el volumen de control  $V_c$ ) el cual tiene asociado un vector unitario  $\underline{n}$  normal a este y con  $\underline{v}$  como la velocidad con la que la propiedad  $q$  atraviesa dicho elemento  $dS$ , entonces la cantidad de la propiedad  $q$  que pasa normalmente por  $dS$  en la unidad de tiempo será:

$$\rho q \underline{v} \cdot \underline{n} \quad (3.2)$$

De aquí se deduce que la cantidad de la propiedad que atraviesa toda la superficie está dada por:

$$Q_{\rho q} = \int_S \rho q \underline{v} \cdot \underline{n} dS \quad (3.3)$$

Como el sentido de  $\underline{n}$  es hacia fuera del volumen de control  $V_c$ , entonces  $Q_{\rho q}$  representa la salida neta de la propiedad de dicho volumen de control.

Por otra parte, la cantidad de la propiedad existente en un elemento de volumen  $dV$  en un instante dado es igual a:

$$\rho q dV$$

De aquí que la variación en el tiempo de dicha cantidad esté dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho q) dV$$

y en consecuencia la variación total de la propiedad en todo el volumen de control será:

$$M_{\rho q} = \int_{V_c} \frac{\partial}{\partial t}(\rho q) dV \quad (3.4)$$

Si adicionalmente se reconoce que dentro del volumen de control puede existir creación o destrucción de la propiedad, y llamando  $D[\rho q]$  a la tasa de creación de la propiedad por unidad de volumen y por unidad de tiempo, entonces la creación de la propiedad en todo el volumen de control por unidad de tiempo será:

$$C_{\rho q} = \int_{V_c} D[\rho q] dV \quad (3.5)$$

Con base en lo anterior se establece el principio de conservación que dice que durante una unidad de tiempo la cantidad de la propiedad que sale del volumen de control, más la que se acumula en su interior, es igual a la cantidad que se crea dentro del mismo. Al aplicar este principio de conservación al volumen de control que se está analizando, se obtiene la ecuación general de balance de la cantidad de propiedad (Aparicio y Berezowsky, 1989):

$$Q_{\rho q} + M_{\rho q} = C_{\rho q} \quad (3.6)$$

De aquí que al sustituir (3.3), (3.4) y (3.5) en (3.6) se establece una primera expresión general de balance de la propiedad:

$$\int_S \rho q \underline{v} \cdot \underline{n} \, dS + \int_{V_c} \frac{\partial}{\partial t} (\rho q) dV = \int_{V_c} D[\rho q] dV \quad (3.7)$$

Al ser  $\rho q \underline{v}$  una función vectorial continua y diferenciable, y con el fin de homogenizar las integrales en términos de volumen de control, resulta apropiado adoptar el teorema de la divergencia de Gauss, por lo que se satisface:

$$\int_S \rho q \underline{v} \cdot \underline{n} \, dS = \int_{V_c} \text{div}(\rho q \underline{v}) dV \quad (3.8)$$

Sustituyendo (3.8) en (3.7)

$$\int_{V_c} \text{div}(\rho q \underline{v}) dV + \int_{V_c} \frac{\partial}{\partial t} (\rho q) dV = \int_{V_c} D[\rho q] dV \quad (3.9)$$

La relación (3.9) representa la ecuación general de balance de la propiedad en términos integrales de volumen. No obstante que  $\text{div}(\rho q \underline{v})$  implica que  $\rho q \underline{v}$  sea una función vectorial, continua y diferenciable, gracias a las propiedades de las integrales, es posible aplicar (3.9) a aquellos casos en que existe un número finito de discontinuidades en  $\rho q \underline{v}$  dentro del volumen de control  $V_c$ . Lo mismo puede decirse respecto a la continuidad de  $\rho q$  en el dominio del tiempo. Integrando la Ecuación 3.9 en un intervalo de tiempo  $\Delta t = t_2 - t_1$ , resulta

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{V_c} \text{div}(\rho q \underline{v}) dV \, dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{V_c} \frac{\partial}{\partial t} (\rho q) dV \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{V_c} D[\rho q] dV \, dt \quad (3.10)$$

$$\text{si } \text{div}(\rho q \underline{v}) = \frac{\partial(\rho q v_s)}{\partial s} + \frac{\partial(\rho q v_n)}{\partial n} + \frac{\partial(\rho q v_b)}{\partial b}$$

Al sustituir en (3.10) se obtiene finalmente la ecuación general de conservación de una propiedad  $q$  en forma integral:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} \left[ \frac{\partial(\rho q v_s)}{\partial s} + \frac{\partial(\rho q v_n)}{\partial n} + \frac{\partial(\rho q v_b)}{\partial b} \right] db \, dn \, ds \, dt + \quad (3.11)$$

$$\int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial}{\partial t}(\rho q) \right] dt \, db \, dn \, ds = \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} D[\rho q] db \, dn \, ds \, dt$$

## 3.2 Ecuación de conservación de masa

### 3.2.1 Concepto de masa

Analizando la segunda ley de Newton  $\underline{f} = m\underline{a}$ , se tiene que  $\underline{f}$  es el vector fuerza aplicado a un cuerpo,  $\underline{a}$  es el vector aceleración que le imprime dicha fuerza al cuerpo y  $m$  es un número que representa la masa del mismo, es decir, intuitivamente, la cantidad de materia contenida en este. Esta definición de masa, ofrecida por el propio Newton, puede ser complementada con la interpretación que se describe en los párrafos siguientes.

La experiencia muestra que todos los cuerpos ejercen cierta resistencia a todos los intentos de cambiar su velocidad, tanto en módulo como en dirección. Esta propiedad, que expresa el grado de resistencia del cuerpo a variar su velocidad, se denomina inercia. En diferentes cuerpos la inercia se manifiesta en grado diferente. Como medida de inercia se utiliza la magnitud llamada masa. El cuerpo con mayor masa tendrá mayor inercia, es decir, mayor resistencia a variar su velocidad y viceversa (Irodov, 1981). El concepto de masa se puede introducir determinando la razón de las masas de dos cuerpos diferentes por la relación inversa de las aceleraciones, comunicadas a ellos por fuerzas iguales:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}$$

Esta definición no exige la medición preliminar de las fuerzas, es suficiente disponer solamente del criterio de igualdad de las fuerzas. Por ejemplo, si sobre dos cuerpos diferentes que están en un plano horizontal liso se actúa sucesivamente con un mismo resorte, orientándolo de forma horizontal y estirándolo hasta una misma longitud, entonces se puede afirmar que la acción del resorte sobre cada cuerpo es la misma en ambos casos, es decir, las fuerzas son también iguales.

De este modo, la comparación de las masas de dos cuerpos sobre las cuales actúa una misma fuerza se reduce a la comparación de las aceleraciones de estos. Tomando cierto cuerpo como patrón de masa, se tiene la posibilidad de comparar la masa de

cualquier cuerpo con este patrón. Como muestra la experiencia, en la mecánica newtoniana una masa determinada posee dos propiedades importantes:

- La masa es una magnitud aditiva, es decir, la masa de un cuerpo compuesto es igual a la suma de las masas de sus partes
- La masa del cuerpo como tal es una magnitud constante que no varía durante su movimiento

### 3.2.2 Expresiones generales

Si la propiedad intensiva del sistema fluido que se desea estudiar es la masa, entonces, por definición de  $q$ :

$$q = \frac{\text{masa}}{\text{masa}} = 1 \quad (3.12)$$

Sustituyendo (3.12) en (3.11)

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} \left[ \frac{\partial(\rho v_s)}{\partial s} + \frac{\partial(\rho v_n)}{\partial n} + \frac{\partial(\rho v_b)}{\partial b} \right] db \, dn \, ds \, dt + \quad (3.13)$$

$$\int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t}(\rho) dt \, db \, dn \, ds = \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} D[\rho] db \, dn \, ds \, dt$$

Cuando el flujo es unidimensional, se supone que la variación de la propiedad en las direcciones  $n$  y  $b$  es despreciable y que la creación de la misma es independiente de dichas direcciones, por lo que (3.13) se reduce a:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} \frac{\partial(\rho v_s)}{\partial s} db \, dn \, ds \, dt + \int_{s_1}^{s_2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t}(\rho) \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} db \, dn \, ds \, dt = \quad (3.14)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} D[\rho] \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} db \, dn \, ds \, dt$$

Tomando en cuenta que el área transversal está dada por:

$$A = \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} db \, dn \quad (3.15)$$

Al sustituir (3.15) en (3.14) y considerando fluido incomprensible ( $\rho = \text{constante}$ ), se obtiene:

$$\rho \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} \frac{\partial(v_s)}{\partial s} db dn ds dt + \rho \int_{s_1}^{s_2} [(A)_{t_2} - (A)_{t_1}] ds = \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} D[\rho] A ds dt \quad (3.16)$$

$$\rho \int_{t_1}^{t_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} (v_{s_2} - v_{s_1}) db dn dt + \rho \int_{s_1}^{s_2} [(A)_{t_2} - (A)_{t_1}] ds = \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} D[\rho] A ds dt$$

Si el canal tiene curvatura, entonces se cumple  $dn = dr$  si adicionalmente se adopta la hipótesis de que la velocidad varía en la dirección radial de acuerdo con la relación  $v_s = C_e r^m$ , resulta:

$$\int_{n_1}^{n_2} v_s dn = \int_{r_1}^{r_2} C_e r^m dr = \frac{C_e}{m+1} (r_2^{m+1} - r_1^{m+1}) \quad (3.17)$$

y dado que

$$C_e = \frac{(m+1) (r_{n'} - r_{n_o}) u}{r_{n'}^{m+1} - r_{n_o}^{m+1}} \quad (3.18)$$

entonces, considerando que  $r_{n'} = r_2$  y  $r_{n_o} = r_1$ , resulta:

$$\int_{n_1}^{n_2} v_s dn = (r_2 - r_1) u$$

Por lo tanto, la Ecuación 3.16 se puede expresar en la forma:

$$\rho \int_{t_1}^{t_2} \int_{b_1}^{b_2} \{ [(r_2 - r_1) u]_{s_2} - [(r_2 - r_1) u]_{s_1} \} db dt + \rho \int_{s_1}^{s_2} [(A)_{t_2} - (A)_{t_1}] ds = \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} D[\rho] A ds dt$$

La velocidad media  $u$  es constante en cada sección transversal, por lo que puede salir de la integral respecto a  $b$ :

$$\rho \int_{t_1}^{t_2} \{ u_{s_2} \int_{b_1}^{b_2} (r_2 - r_1)_{s_2} db - u_{s_1} \int_{b_1}^{b_2} (r_2 - r_1)_{s_1} db \} dt + \rho \int_{s_1}^{s_2} [(A)_{t_2} - (A)_{t_1}] ds = \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} D[\rho] A ds dt \quad (3.19)$$

si

$$\int_{r_1}^{r_2} v_s dr = (r_2 - r_1) u = u \int_{r_1}^{r_2} dr$$

y siendo

$$\int_{r_1}^{r_2} \int_{b_1}^{b_2} db \, dr = A$$

entonces la expresión (3.19) se reduce a:

$$\rho \int_{t_1}^{t_2} [(Au)_{s_2} - (Au)_{s_1}] dt + \rho \int_{s_1}^{s_2} [(A)_{t_2} - (A)_{t_1}] ds = \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} D[\rho] A \, ds \, dt \quad (3.20)$$

Si se considera que  $Q = Au$  y que el término de creación de la propiedad está afectado por  $\rho$ , la cual se asume como constante, la Ecuación 3.32 se puede expresar en la forma:

$$\rho \int_{t_1}^{t_2} [Q_{s_2} - Q_{s_1}] dt + \rho \int_{s_1}^{s_2} [A_{t_2} - A_{t_1}] ds = \rho \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} D[1] A \, ds \, dt \quad (3.21)$$

Esta ecuación representa la versión integral de la ecuación de conservación de masa para un flujo unidimensional. Dicha ecuación también puede ser expresada como:

$$\rho \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial Q}{\partial S} ds \, dt + \rho \int_{s_1}^{s_2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial A}{\partial t} dt \, ds = \rho \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} D[1] A \, ds \, dt$$

Y por las propiedades de las integrales:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \left( \rho \frac{\partial Q}{\partial S} + \rho \frac{\partial A}{\partial t} - \rho A D[1] \right) ds \, dt = 0$$

Para que se cumpla esta ecuación, el integrando debe ser nulo, por lo tanto:

$$\frac{\partial Q}{\partial S} + \frac{\partial A}{\partial t} = A D[1] \quad (3.22)$$

Esta ecuación representa la versión diferencial de la ecuación de conservación de masa en un flujo unidimensional.

### 3.2.3 Ecuaciones completas

Hay una interpretación importante del término de creación o destrucción de masa cuando existe una adición positiva o negativa del fluido desde el exterior del dominio de solución de las ecuaciones (3.21) y (3.22). Esta adición podría ser, por ejemplo, precipitación, infiltración, descargas por alcantarillas o descargas por vertedores laterales, entre otras manifestaciones, y suele denominarse gasto lateral  $ql(s,t)$

(Aparicio, 1988). Así, adoptando  $D[1] = ql(s,t)$  las ecuaciones (3.21) y (3.22) se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\int_{t_1}^{t_2} [Q_{s_2} - Q_{s_1}] dt + \int_{s_1}^{s_2} [A_{t_2} - A_{t_1}] ds = \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} ql(s,t) ds dt \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial A}{\partial t} = ql(s,t) \quad (3.24)$$

Es de resaltar que  $ql(s,t)$  representa físicamente una extracción o aportación de volumen por unidad de longitud de conducción y unidad de tiempo ( $m^3/m^2/s=m^2/s$ ), y que su magnitud puede cambiar en el espacio y en el tiempo.

### 3.3 Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento

#### 3.3.1 Cantidad de movimiento de una partícula

La ley fundamental de la dinámica newtoniana indica que la fuerza instantánea aplicada a una partícula es igual al producto de la masa por la aceleración de la partícula. La representación algebraica de esta ley se puede escribir como:

$$\underline{f} = m \underline{a} \quad (3.25)$$

en donde

$\underline{f}$  = fuerza instantánea

$m$  = masa

$\underline{a}$  = aceleración instantánea

multiplicando por un intervalo diferencial de tiempo  $dt$ , durante el cual actúa  $\underline{f}$ , resulta:

$$\underline{f} dt = m \underline{a} dt$$

Por lo que al tomar en cuenta que la masa es constante y que  $d\underline{v} = \underline{a} dt$ , se obtiene:

$$\underline{f} dt = d(m \underline{v}) \quad (3.26)$$

Al producto  $\underline{f} dt$  se le llama impulso, mientras que al producto  $m\underline{v}$  se le conoce como cantidad de movimiento o momentum incorporado durante el intervalo  $dt$ . Al adoptar  $\underline{a}=d\underline{v}/dt$ , la Ecuación 3.26 se puede escribir también en la forma:

$$\frac{d m \underline{v}}{dt} = \underline{f} \quad (3.27)$$

Es decir, la derivada de la cantidad de movimiento de una partícula respecto al tiempo es igual a la fuerza instantánea que actúa sobre ella. De esta manera si  $\underline{f} = 0$ , entonces,  $m \underline{v} = \text{constante}$ .

Por otra parte, de la Ecuación 3.27 se deduce que el incremento elemental de la cantidad de movimiento de la partícula en el lapso  $dt$  es igual a  $\underline{f} dt$ . De aquí que al integrar la Ecuación 3.27 en el tiempo se encuentre el incremento de cantidad de movimiento de la partícula en el intervalo finito de tiempo  $t_2 - t_1$ :

$$(m \underline{v})_{t_2} - (m \underline{v})_{t_1} = \int_{t_1}^{t_2} \underline{f} dt$$

De esta manera resulta que el incremento de la cantidad de movimiento, en cualquier intervalo de tiempo, es igual al impulso producido por la fuerza  $\underline{f}$  aplicada en ese mismo tiempo. Si  $\underline{f}$  es constante, entonces este vector puede salir de la integral, con lo que resulta:

$$(m \underline{v})_{t_2} - (m \underline{v})_{t_1} = \underline{f}(t_2 - t_1)$$

### 3.3.2 Cantidad de movimiento de un sistema

La cantidad de movimiento de un sistema es igual a la suma vectorial de las cantidades de movimiento de sus partes por separado:

$$m \underline{v} = \sum m \underline{v}_i \quad (3.28)$$

donde

$m \underline{v}_i = \text{cantidad de movimiento de la } i\text{-ésima partícula}$

La cantidad de movimiento del sistema es una magnitud aditiva, es decir, es igual a la suma de las cantidades de movimiento de sus partes por separado, independientemente de que interactúen entre sí o no (Irodov, 1981).

Para determinar la magnitud física que especifica la variación de la cantidad de movimiento del sistema, se procede a diferenciar la Ecuación 3.28 respecto al tiempo:

$$\frac{d m \underline{v}}{dt} = \sum \frac{d m \underline{v}_i}{dt} \quad (3.29)$$

De acuerdo con (3.27)

$$\frac{d m v_i}{dt} = \sum_k \underline{f}_{ik} + \underline{f}_i$$

donde

$\underline{f}_{ik}$  = fuerzas que actúan sobre la i-ésima partícula desde otras partículas del sistema (fuerzas internas)

$\underline{f}_i$  = fuerza que actúa sobre la i-ésima partícula desde otros cuerpos que no entran en el sistema considerando (fuerzas externas)

Sustituyendo esta última expresión en (3.29), se obtiene:

$$\frac{d m v}{dt} = \sum_i \sum_k \underline{f}_{ik} + \sum_i \underline{f}_i$$

La doble sumatoria en el segundo miembro representa la suma de todas las fuerzas internas. En correspondencia con la tercera ley de Newton, las fuerzas de interacción entre las partículas del sistema son iguales por pares según su módulo y contrarias en su dirección. Por esto, la fuerza resultante en cada par de interacciones es igual a cero, lo que significa que también la suma vectorial de todas las fuerzas internas es nula. Como resultado, la última ecuación toma el siguiente aspecto:

$$\frac{d m v}{dt} = \sum_i \underline{f}_i = \underline{f} \quad (3.30)$$

donde, en este caso:

$\underline{f}$  = resultante de todas las fuerzas externas

La Ecuación 3.30 significa que la derivada de la cantidad de movimiento en un sistema respecto al tiempo es igual a la suma vectorial de todas las fuerzas externas que actúan sobre las partículas del sistema. Dicha ecuación también se puede expresar en la forma:

$$\underline{f} dt = d(m v) \quad (3.31)$$

Nótese que esta ecuación es igual, en forma, a la (3.26); sin embargo, debe tenerse en cuenta que en la 3.31  $\underline{f}$  representa las fuerzas externas que actúan sobre el sistema durante el diferencial de tiempo  $dt$  y  $m v$  es la cantidad de movimiento del sistema, mientras que en el caso de la 3.26 estos aspectos se relacionan con una sola partícula.

### 3.3.3 Expresiones generales

Con base en la Ecuación 3.31 se puede afirmar que la cantidad de movimiento es una propiedad vectorial; y dado que  $q$  debe ser una propiedad escalar, resulta necesario estudiar por separado cada una de las componentes que intervienen en la cantidad de movimiento. Afortunadamente para el caso de interés, el flujo es unidimensional, por lo que la cantidad de movimiento se puede operar como una magnitud escalar. De aquí que la cantidad de la propiedad  $q$  asociada a la cantidad de movimiento en la dirección  $s$  resulte ser:

$$q = \frac{m v_s}{m} = v_s \quad (3.32)$$

Sustituyendo 3.32 en 3.11

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} \left[ \frac{\partial(\rho v_s^2)}{\partial s} + \frac{\partial(\rho v_s v_n)}{\partial n} + \frac{\partial(\rho v_s v_b)}{\partial b} \right] db \, dn \, ds \, dt + \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} [(\rho v_s)_{t_2} - (\rho v_s)_{t_1}] db \, dn \, ds =$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} D[\rho v_s] db \, dn \, ds \, dt$$

Dado que el flujo de interés es unidimensional en la dirección  $s$ , las componentes de la velocidad en las direcciones normal y binormal son nulas, por lo tanto, resulta:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} \left[ \frac{\partial(\rho v_s^2)}{\partial s} \right] db \, dn \, ds \, dt + \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} [(\rho v_s)_{t_2} - (\rho v_s)_{t_1}] db \, dn \, ds =$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} D[\rho v_s] db \, dn \, ds \, dt$$

Si adicionalmente se ha supuesto que el fluido es incompresible ( $\rho = \text{constante}$ ) y que  $v_s$  es independiente de la dirección binormal ( $b$ ), se obtiene:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \left[ \frac{\partial(\rho v_s^2)}{\partial s} \right] \int_{b_1}^{b_2} db \, dn \, ds \, dt + \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} [(\rho v_s)_{t_2} - (\rho v_s)_{t_1}] \int_{b_1}^{b_2} db \, dn \, ds = \quad (3.33)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} D[\rho v_s] db \, dn \, ds \, dt$$

Si  $v_s = C_e r^m$ , resulta:

$$\int_{n_1}^{n_2} v_s^2 dn = \int_{r_1}^{r_2} C_e^2 r^{2m} dr = \left. \frac{C_e^2 r^{2m+1}}{2m+1} \right|_{r_1}^{r_2} = \frac{C_e^2}{2m+1} [r_2^{2m+1} - r_1^{2m+1}] \quad (3.34)$$

y tomando en cuenta que de acuerdo con la Ecuación 3.18 se cumple:

$$C_e = \frac{(m+1)(r_{n'} - r_{n_o}) u}{r_{n'}^{m+1} - r_{n_o}^{m+1}}$$

Entonces, considerando en 3.34  $r_2 = r_{n'}$  y  $r_1 = r_{n_o}$  resulta:

$$\int_{n_1}^{n_2} v_s^2 dn = \frac{(m+1)(r_{n'} - r_{n_o})^2 u^2}{(r_{n'}^{m+1} - r_{n_o}^{m+1})^2 (2m+1)} [r_{n'}^{2m+1} - r_{n_o}^{2m+1}] \quad (3.35)$$

Por procedimientos semejantes, se demuestra que:

$$\int_{n_1}^{n_2} v_s dn = u(n_2 - n_1) \quad (3.36)$$

Sustituyendo (3.47) y (3.48) en (3.45) y aceptando por simplificación:

$$\int_{b_1}^{b_2} db = \frac{A}{(n_2 - n_1)} = \frac{A}{(r_{n'} - r_{n_o})};$$

se obtiene:

$$\rho \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[ \frac{(m+1)^2 (r_{n'} - r_{n_o}) u^2}{(r_{n'}^{m+1} - r_{n_o}^{m+1})^2 (2m+1)} (r_{n'}^{2m+1} - r_{n_o}^{2m+1}) A \right]_{s_2} - \left[ \frac{(m+1)^2 (r_{n'} - r_{n_o}) u^2}{(r_{n'}^{m+1} - r_{n_o}^{m+1})^2 (2m+1)} (r_{n'}^{2m+1} - r_{n_o}^{2m+1}) A \right]_{s_1} \right\} dt + \quad (3.37)$$

$$\int_{s_1}^{s_2} [(\rho Au)_{t_2} - (\rho Au)_{t_1}] ds = \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} D[\rho v_s] db dn ds dt$$

que es la versión integral de la ecuación de cantidad de movimiento. En forma diferencial resulta:

$$\rho \frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{(m+1) (r_{n'} - r_{n_o}) u^2}{(r_{n'}^{m+1} - r_{n_o}^{m+1})^2 (2m+1)} (r_{n'}^{2m+1} - r_{n_o}^{2m+1}) A \right] + \rho \frac{\partial (Au)}{\partial t} = \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} D[\rho v_s] db dn \quad (3.38)$$

Con el fin de dar una presentación más compacta de estas ecuaciones, resulta adecuado hacer la siguiente asignación:

$$Cr = \frac{(m+1)^2 (r_{n'} - r_{n_o})}{(r_{n'}^{m+1} - r_{n_o}^{m+1})^2 (2m+1)} (r_{n'}^{2m+1} - r_{n_o}^{2m+1}) \quad (3.39)$$

de donde la versión integral se puede expresar en la forma:

$$\rho \int_{t_1}^{t_2} [(Cr u^2 A)_{s_2} - (Cr u^2 A)_{s_1}] dt + \int_{s_1}^{s_2} [(\rho Au)_{t_2} - (\rho Au)_{t_1}] ds = \quad (3.40)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} D[\rho v_s] db dn ds dt$$

y la diferencial

$$\rho \frac{\partial}{\partial s} (Cr A u^2) + \rho \frac{\partial (Au)}{\partial t} = \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} D[\rho v_s] db dn \quad (3.41)$$

### 3.3.4 Expresiones completas

La creación o destrucción de cantidad de movimiento se produce por efecto de las fuerzas externas que actúan sobre el sistema fluido. Para aplicaciones prácticas en el campo de la ingeniería hidráulica, las fuerzas externas que comúnmente se consideran

son las fuerzas de presión, la fuerza de gravedad y el esfuerzo cortante (fricción). A continuación, se describen detalladamente.

### Fuerzas de presión

Esta fuerza está constituida por la resultante de las fuerzas netas de presión que actúan sobre el volumen de control, proyectada sobre la dirección en cuestión. La parte del término de creación o destrucción de la cantidad de movimiento correspondiente a las fuerzas de presión en la dirección  $s$  es igual a:

$$D_p[\rho u] = -\frac{\partial p}{\partial s} \quad (3.42)$$

Por tanto

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} D_p[\rho v_s] db dn ds dt = -\int_{t_1}^{t_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} (p_{s_2} - p_{s_1}) \int_{b_1}^{b_2} db dn dt \quad (3.43)$$

Aceptando la hipótesis de que la presión se distribuye de la misma forma que en un flujo uniforme con curvatura, de la Ecuación 2.67 se tiene:

$$p = \rho g d \operatorname{sen} \alpha_s \pm \rho g \frac{u^2}{2gm} \frac{(m+1)^2 (r_{n'} - r_{n_o})^2}{(r_{n'}^{m+1} - r_{n_o}^{m+1})^2} (r_n^{2m} - r_{n'}^{2m})$$

de donde resulta

$$\int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} p db dn = \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} \left[ \rho g d \operatorname{sen} \alpha_s \pm \rho g \frac{u^2}{2gm} \frac{(m+1)^2 (r_{n'} - r_{n_o})^2}{(r_{n'}^{m+1} - r_{n_o}^{m+1})^2} (r_n^{2m} - r_{n'}^{2m}) \right] db dn$$

$$\int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} p db dn = \rho g \operatorname{sen} \alpha_s \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} d db dn \pm \rho g \frac{u^2}{2gm} \frac{(m+1)^2 (r_{n'} - r_{n_o})^2}{(r_{n'}^{m+1} - r_{n_o}^{m+1})^2} \int_{n_1}^{n_2} (r_n^{2m} - r_{n'}^{2m}) \int_{b_1}^{b_2} db dn$$

Considerando que  $n_2 = n'$  y  $n_1 = n_o$ , se obtiene

$$\int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} p db dn = \rho g \operatorname{sen} \alpha_s \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} d db dn \pm \rho g \frac{u^2}{2gm} \frac{(m+1)^2 (r_{n_2} - r_{n_1})^2}{(r_{n_2}^{m+1} - r_{n_1}^{m+1})^2} \int_{n_1}^{n_2} (r_n^{2m} - r_{n_2}^{2m}) \int_{b_1}^{b_2} db dn \quad (3.44)$$

Para integrar el primer término del segundo miembro resulta adecuado inspeccionar los elementos geométricos de una sección transversal de un canal (**Figura 3.2**) e incorporar las siguientes relaciones:

$$dx = \cos \alpha_n db$$

$$dz = \cos \alpha_n dn$$

$$z = \zeta \cos \alpha_n$$

por lo que

$$dx dz = \cos^2 \alpha_n dn db$$

Multiplicando ambos miembros por  $z$

$$z dz dx = \cos^2 \alpha_n z dn db$$

si  $\cos \alpha_n = \text{sen} \alpha_s$  y  $z \text{sen} \alpha_s = d$ , resulta

$$z dz dx = \text{sen} \alpha_s d dn db$$

si  $z = \zeta \text{sen} \alpha_s$

se satisface

$$\text{sen} \alpha_s \zeta d\zeta dx = \text{sen} \alpha_s d dn db$$

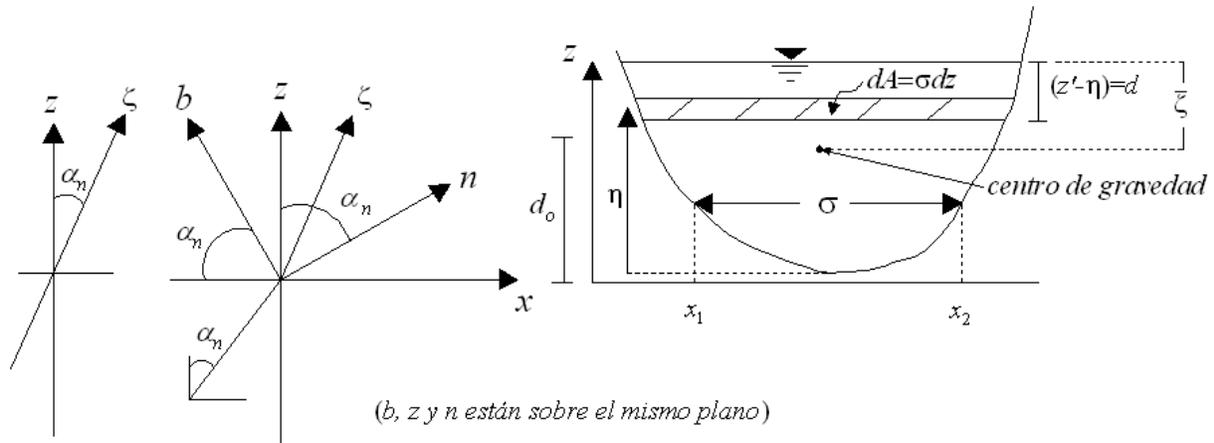
Por lo tanto

$$\rho g \text{sen} \alpha_s \int_{b_1}^{b_2} \int_{n_1}^{n_2} d dn db = \rho g \text{sen} \alpha_s \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \int_{x_1}^{x_2} \zeta d\zeta dx$$

De aquí que con base en la **Figura 3.2**, se tenga

$$\rho g \text{sen} \alpha_s \int_{b_1}^{b_2} \int_{n_1}^{n_2} d dn db = \rho g \text{sen} \alpha_s \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \zeta \int_{x_1}^{x_2} d\zeta dx$$

$$\rho g \text{sen} \alpha_s \int_{b_1}^{b_2} \int_{n_1}^{n_2} d dn db = \rho g \text{sen} \alpha_s \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \sigma \zeta d\zeta$$



**Figura 3.2** Transformación de coordenadas

De la misma **Figura 3.2**, tomando en cuenta que el eje  $\eta$  tiene su origen fijo en el fondo del canal, mientras que el origen del eje  $\zeta$  se encuentra ubicado a la profundidad en que se pretende evaluar la presión, lo que significa que el valor de  $\zeta$  coincide con el de  $d$ , se tiene:

$$\zeta = (d_o - \eta), \quad d\zeta = d\eta$$

Por lo tanto, resulta

$$\rho g \operatorname{sen} \alpha_s \int_{b_1}^{b_2} \int_{n_1}^{n_2} d \, dn \, db = \rho g \operatorname{sen} \alpha_s \int_0^{d_o} \sigma (d_o - \eta) \, d\eta = I_1 \quad (3.45)$$

El valor de  $I_1$  dependerá naturalmente de la forma de la sección transversal del canal.

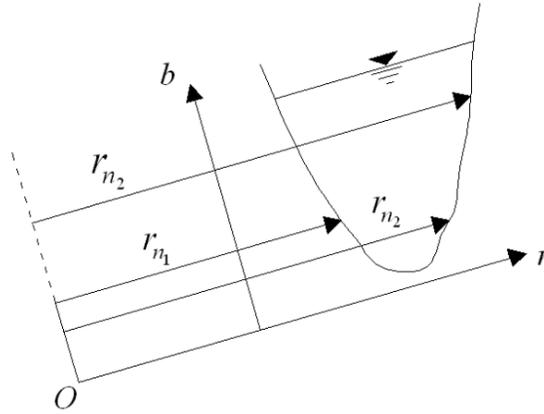
Por otra parte, tomando en cuenta el segundo término del segundo miembro de la Ecuación 3.44 y asignando

$$Cm = \frac{(m+1)^2 (r_{n_2} - r_{n_1})^2}{m (r_{n_2}^{m+1} - r_{n_1}^{m+1})^2}$$

Y dado que  $dn = dr$ , resulta

$$\int_{b_1}^{b_2} \rho Cm \frac{u^2}{2g} \int_{n_1}^{n_2} (r_n^{2m} - r_{n_2}^{2m}) \, dn \, db = \rho \frac{u^2}{2} \int_{b_1}^{b_2} Cm \left[ \frac{r_{n_2}^{2m+1} - r_{n_1}^{2m+1}}{2m+1} - r_{n_2}^{2m} (r_{n_2} - r_{n_1}) \right] \, db \quad (3.46)$$

En rigor  $r_{n_2}$  y  $r_{n_1}$  son funcionalmente dependientes de  $b$  (**Figura 3.3**); estas funciones son diferentes y dependen del tipo de geometría de la sección transversal.



**Figura 3.3** Radio como función de la coordenada binormal

Para fines prácticos, y dada la poca variación que comúnmente existe en la dirección binormal del radio, se puede considerar  $r_{n_1}$  y  $r_{n_2}$  independientes de  $b$ , para lo cual se consideran tanto  $r_{n_1}$  como  $r_{n_2}$  constantes con un valor promedio de sus correspondientes funciones. Adoptando este criterio, la Ecuación 3.46 se puede escribir como:

$$\int_{b_1}^{b_2} \rho C m \frac{u^2}{2g} \int_{n_1}^{n_2} (r_n^{2m} - r_{n_2}^{2m}) dn db = \rho \frac{u^2}{2} C m \left[ \frac{r_{n_2}^{2m+1} - r_{n_1}^{2m+1}}{2m+1} - r_{n_2}^{2m} (r_{n_2} - r_{n_1}) \right] \int_{b_1}^{b_2} db$$

Para evaluar la integral  $\int_{b_1}^{b_2} db$  resulta adecuado tomar en cuenta que:

$$\int_{r_{n_1}}^{r_{n_2}} \int_{b_1}^{b_2} db dr = A$$

$$\int_{b_1}^{b_2} (r_{n_2} - r_{n_1}) db = A$$

Y aceptando la independenciam de  $(r_{n_2} - r_{n_1})$  con respecto a  $b$ :

$$\int_{b_1}^{b_2} db = \frac{A}{(r_{n_2} - r_{n_1})} \quad (3.47)$$

Sustituyendo en (3.46), se obtiene:

$$\int_{b_1}^{b_2} \rho C_m \frac{u^2}{2} \int_{n_1}^{n_2} (r_n^{2m} - r_{n_2}^{2m}) dn db = C_m \left[ \frac{r_{n_2}^{2m+1} - r_{n_1}^{2m+1}}{(r_{n_2} - r_{n_1})(2m+1)} - r_{n_2}^{2m} \right] \rho \frac{u^2}{2} A$$

Sumando esta con la (3.45) se obtiene:

$$\int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} \rho db dn = \rho g \operatorname{sen} \alpha_s \int_o^d \sigma(d-\eta) d\eta \pm C_m \left[ \frac{r_{n_2}^{2m+1} - r_{n_1}^{2m+1}}{(r_{n_2} - r_{n_1})(2m+1)} - r_{n_2}^{2m} \right] \rho \frac{u^2}{2} A$$

De aquí que el término de creación o destrucción de la cantidad de movimiento debido a la presión resulte ser igual a:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} D_p [\rho v_s] db dn ds dt = - \int_{t_1}^{t_2} \left[ \left( I_1 \pm \rho C_m u^2 A \right)_{s_2} - \left( I_1 \pm \rho C_m u^2 A \right)_{s_1} \right] dt \quad (3.48)$$

En donde, tomando en cuenta que  $r_{n_2} = r_{n'}$  y  $r_{n_1} = r_{n_o}$ ,  $C_M$  es igual a:

$$C_M = \frac{(m+1)^2 (r_{n'} - r_{n_o})^2}{(r_{n'}^{m+1} - r_{n_o}^{m+1})^2} 2m \left[ \frac{r_{n'}^{2m+1} - r_{n_o}^{2m+1}}{(r_{n'} - r_{n_o})(2m+1)} - r_{n'}^{2m} \right]$$

### Fuerza de gravedad

La creación de cantidad de movimiento por efecto de las fuerzas gravitatorias en la dirección  $s$  está dada por  $D_g [\rho v_s] = \rho g_s$  donde  $g_s$  es la componente del vector de aceleración gravitatoria en la dirección del flujo (**Figura 3.4**), por lo tanto, se tiene que:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} D_g [\rho v_s] db dn ds dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} \rho g_s db dn ds dt$$

Considerando como hipótesis simplificatoria que la componente de la aceleración de la gravedad  $g_s$  es constante entre los límites de integración en  $n$  y  $b$  y que el fluido es incompresible, se tendrá:

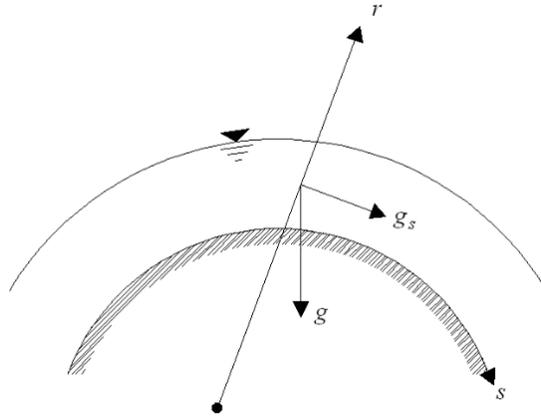
$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} D_g [\rho v_s] db dn ds dt = \rho g_s \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} db dn ds dt \quad (3.49)$$

Si adicionalmente se toma en cuenta que

$$\int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} db \, dn = A$$

donde  $A$  es el área hidráulica, entonces la Ecuación 3.49 se reescribe en la forma:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} D_g [\rho v_s] \, db \, dn \, ds \, dt = \rho \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} g_s \, A \, ds \, dt \quad (3.50)$$



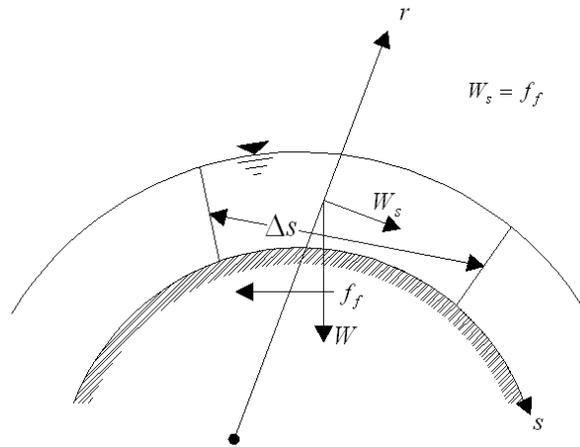
**Figura 3.4** Componente de la fuerza de gravedad

La componente del vector de aceleración gravitatoria está dada por  $g_s = g \, \text{sen} \alpha_n$  (**Figura 3.3**), de donde al sustituir esta expresión en (3.50) se obtiene:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} D_g [\rho v_s] \, db \, dn \, ds \, dt = \rho g \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \text{sen} \alpha_n \, A \, ds \, dt \quad (3.51)$$

### **Esfuerzo cortante (fricción)**

En un flujo uniforme a superficie libre, el escurrimiento se debe a la acción de la gravedad. La fuerza que propicia este escurrimiento es la componente en la dirección del movimiento del peso del líquido contenido en el volumen de control. Esta componente es contrarrestada por la fuerza de fricción generada por el esfuerzo cortante entre el líquido y las fronteras sólidas.



**Figura 3.5** Flujo uniforme

De la **Figura 3.5** se concluye que:

$$W = \gamma_o \text{Vol}$$

$$W_s = \gamma_o \text{Vol} \text{ sen} \alpha_n = \gamma_o A \Delta s \text{ sen} \alpha_n$$

y la fuerza que la contrarresta, que es igual y de sentido contrario, vale

$$f_f = \tau_o P \Delta s$$

Por lo tanto, se cumple

$$\gamma_o A \Delta s \text{ sen} \alpha_n = \tau_o P \Delta s \tag{3.52}$$

de donde

$$\tau_o = \gamma_o \frac{A}{P} \text{sen} \alpha_n$$

y con  $A/P$  igual al radio hidráulico  $Rh$

$$\tau_o = \gamma_o Rh \text{ sen} \alpha_n \tag{3.53}$$

El escurrimiento en un canal es por lo general turbulento. Hay que recordar que, para este tipo de flujo, de acuerdo con Prandtl (Daily y Harleman; 1981), se satisface:

$$\tau_t = \rho l^2 \left( \frac{du}{d\eta} \right)^2$$

y aceptando por simplificación que  $\tau_o = \tau_t$ , resulta

$$\gamma_o Rh \operatorname{sen} \alpha_n = \rho l^2 \left( \frac{du}{d\eta} \right)^2$$

De aquí que

$$\frac{du}{d\eta} = \sqrt{\frac{\gamma_o Rh \operatorname{sen} \alpha_n}{\rho l^2}} \quad (3.54)$$

Para zonas ubicadas cerca del fondo y canales muy anchos, se puede suponer  $l = k \eta$  y  $Rh = (d_o - \eta)$ , de donde (3.54) se expresa como:

$$\frac{du}{d\eta} = \sqrt{\frac{\gamma_o \operatorname{sen} \alpha_n}{\rho \cdot 16k}} \frac{(d_o - \eta)^{1/2}}{\eta}$$

Considerando, por simplificación del fenómeno, que la velocidad es nula sobre la rugosidad media de fondo ( $\eta = \varepsilon$ ) y que en la superficie ( $\eta = d_o$ ) se presenta una velocidad equivalente a la velocidad media  $u$ , después de integrar esta última ecuación entre los límites  $\varepsilon$  y  $d_o$  se obtiene:

$$u = \left( \frac{\gamma_o \operatorname{sen} \alpha_n}{\rho k^2} \right)^{1/2} \left[ 2\sqrt{d_o - \varepsilon} + \sqrt{d_o} \operatorname{Ln} \left| \frac{-\varepsilon}{2d + 2\sqrt{d_o - \varepsilon} \sqrt{d_o}} \right| \right]$$

Si  $\varepsilon \ll d_o$

$$u = \left( \frac{\gamma_o \operatorname{sen} \alpha_n}{\rho k^2} \right)^{1/2} \left[ 2\sqrt{d_o} + \sqrt{d_o} \operatorname{Ln} \left( \frac{\varepsilon}{4d} \right) \right]$$

$$u = \left( \frac{\gamma_o d_o \operatorname{sen} \alpha_n}{\rho k^2} \right)^{1/2} \left[ 2 + \operatorname{Ln} \left( \frac{\varepsilon}{4d} \right) \right]$$

Elevando al cuadrado y adoptando  $Rh_f = d_o$ , resulta

$$k_o \rho u^2 = \tau_o \quad (3.55)$$

en donde:

$\tau_o$  es el esfuerzo cortante de fondo y  $k_o$  es una función de  $\varepsilon$  y  $Rh_f$ , es decir  $k_o = k_o(\varepsilon, Rh_f)$

De aquí resulta que el esfuerzo cortante de fondo es proporcional a la velocidad media al cuadrado. Una relación de este tipo fue propuesta por Chezy (Chow, 1982), de quien se retoma la siguiente relación que ha servido de base para prácticamente todas las fórmulas de fricción a flujo uniforme:

$$u = C \sqrt{Rh s_f}$$

en donde

$C$  = coeficiente que depende primordialmente del tipo de material y del número de Reynolds

$s_f$  = pendiente de fricción

Sustituyendo (3.55) en (3.52) resulta:

$$\begin{aligned} \gamma_o A \operatorname{sen} \alpha_n &= k_o \rho u^2 P \\ \gamma_o \operatorname{sen} \alpha_n &= k_o \rho u^2 / Rh \end{aligned} \quad (3.56)$$

La cual corresponde a la fuerza por unidad de volumen en la dirección  $s$  generada por el efecto de fricción. De esta manera se puede indicar que la creación de cantidad de movimiento por efecto de las fuerzas de fricción en la dirección  $s$ , está dado por:

$$D_f [\rho v_s] = \rho g \operatorname{sen} \alpha_n$$

En esta ecuación  $\alpha_n$  corresponde al ángulo de la pendiente de fricción, por lo tanto, resulta conveniente expresarlo como  $\alpha_f$ , en el entendido de que se cumple una relación del tipo  $\operatorname{sen} \alpha_f = k_o u^2 / Rh_g$  la cual es válida para un flujo uniforme.

De aquí, la relación anterior resulta ser igual a:

$$D_f [\rho v_s] = \rho g \operatorname{sen} \alpha_f$$

Por lo tanto, se tiene que:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} D_f [\rho v_s] db dn ds dt = -\rho g \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \text{sen } \alpha_f A ds dt \quad (3.57)$$

Las tres componentes de creación o destrucción de cantidad de movimiento, que se derivan de la acción de las fuerzas anteriormente descritas, se consideran como las más significativas y relevantes en los problemas de interés práctico en la hidráulica de canales. Sin embargo, existen otros sistemas con flujo a superficie libre, en los que por su influencia física se deben incluir otras fuerzas. Por ejemplo, la fuerza de Coriolis, que es producto de la rotación de la tierra, adquiere una importancia significativa en los sistemas geofísicos, es decir, en aquellos que cubren grandes áreas como lo son los mares, océanos y lagos (Aparicio, 1988).

En este trabajo, por tener un alcance acotado a canales, únicamente se tomarán en cuenta las tres fuerzas ya analizadas en los párrafos precedentes. Así, de la sustitución de las relaciones (3.48), (3.51) y (3.57) en la (3.40) se obtiene la ecuación de cantidad de movimiento en su versión integral:

$$\rho \int_{t_1}^{t_2} [(Cr u^2 A)_{s_2} - (Cr u^2 A)_{s_1}] dt + \int_{s_1}^{s_2} [(\rho Au)_{t_2} - (\rho Au)_{t_1}] ds = - \int_{t_1}^{t_2} [(I_1 \pm \rho C_M u^2 A)_{s_2} - (I_1 \pm \rho C_M u^2 A)_{s_1}] dt + \rho g \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} A (\text{sen } \alpha_n - \text{sen } \alpha_f) ds dt \quad (3.58)$$

y por lo tanto la versión diferencial resulta ser:

$$\frac{\partial}{\partial s} [\rho (Cr \pm C_M) A u^2 + I_1] + \rho \frac{\partial (Au)}{\partial t} = \rho g A (\text{sen } \alpha_n - \text{sen } \alpha_f) \quad (3.59)$$

Cuando el exponente  $m$  es igual a cero, lo cual implica que  $v_s$  permanezca constante en la dirección  $n$ , y los ángulos  $\alpha_n$  y  $\alpha_f$  sean pequeños, de tal manera que el  $\text{sen } \alpha_n$  es prácticamente igual que la pendiente de plantilla del canal  $s_o$  y el  $\text{sen } \alpha_f$  es muy semejante a la pendiente de fricción  $s_f$ , las ecuaciones (3.58) y (3.59) se reducen a las versiones tradicionales de la ecuación unidimensional de cantidad de movimiento, válidas para representar el flujo en un canal en el que no existe curvatura. Este aspecto se aclara al realizar las operaciones algebraicas correspondientes, con lo que resulta  $Cr = 1$  y  $C_M = 0$ , de donde las ecuaciones (3.58) y (3.59) se reducen a las expresiones siguientes.

**Versión integral**

$$\rho \int_{t_1}^{t_2} [(u^2 A)_{s_2} - (u^2 A)_{s_1}] dt + \int_{s_1}^{s_2} [(\rho Au)_{t_2} - (\rho Au)_{t_1}] ds = \quad (3.60)$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} [(I_1)_{s_2} - (I_1)_{s_1}] dt + \rho g \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} A(s_o - s_f) ds dt$$

**Versión diferencial**

$$\frac{\partial}{\partial s} (\rho A u^2 + I_1) + \rho \frac{\partial (Au)}{\partial t} = \rho g A (s_o - s_f) \quad (3.61)$$

**3.4 Versiones conservativas y no conservativas de las ecuaciones fundamentales**

Para la resolución de diversos problemas referentes a la hidráulica de canales, resulta apropiado, dada la continuidad matemática de las variables hidráulicas que intervienen en los mismos, expresar las ecuaciones de conservación de masa y de cantidad de movimiento en sus versiones conservativa y no conservativa. Esta clasificación se aclara y comprende adecuadamente mediante el proceso deductivo de las expresiones correspondientes para cada una de las versiones indicadas.

**3.4.1 Versiones conservativas**

Las ecuaciones conservativas tienen la propiedad de ser aplicables a cualquier región de flujo, incluso a aquellas en que existen discontinuidades de algunas de las variables hidráulicas, como es el caso de regiones con la presencia de saltos hidráulicos u ondas de Mach, fenómenos en los que tanto el área hidráulica como la velocidad presentan discontinuidades locales.

En estos casos la sumatoria  $\rho(Cr \pm C_M)A u^2 + I_1$  es continua y diferenciable en toda la región de flujo considerada, mientras que cada uno de sus términos en forma independiente son discontinuos y por tanto no diferenciables. De aquí que no sea válido desarrollar las derivadas parciales con respecto al espacio, es decir, respecto a la coordenada  $s$ , cuando se estudian este tipo de fenómenos. Con base en lo anterior, desde el punto de vista físico-matemático, resulta natural que la versión diferencial de las ecuaciones conservativas incluya dicha sumatoria en un solo término diferencial.

### Ecuación de conservación de masa

Dividiendo las relaciones (3.23) y (3.24) entre  $\rho$  resulta:

*Forma integral*

$$\int_{t_1}^{t_2} [Q_{s_2} - Q_{s_1}] dt + \int_{s_1}^{s_2} [A_{t_2} - A_{t_1}] ds = \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} ql(s,t) ds dt \quad (3.62)$$

*Forma diferencial*

$$\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial A}{\partial t} = ql(s,t) \quad (3.63)$$

### Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento

Para este caso se toma en cuenta que:

$$I_1 = \rho g \operatorname{sen} \alpha_s \int_0^{d_o} \sigma (d_o - \eta) d\eta = \rho g \operatorname{sen} \alpha_s \int_0^{d_o} \zeta dA = \rho g \operatorname{sen} \alpha_s A \bar{\zeta} \quad (3.64)$$

en donde  $\bar{\zeta}$  es igual a la profundidad al centro de gravedad medida a partir de la superficie libre sobre el eje  $\zeta$ ; es decir, perpendicularmente a la plantilla del canal (**Figura 3.2**).

Sustituyendo (3.64) en (3.58) y (3.59), se obtiene:

*Forma integral*

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \left[ (Cr Q^2 / A)_{s_2} - (Cr Q^2 / A)_{s_1} \right] dt + \int_{s_1}^{s_2} (Q_{t_2} - Q_{t_1}) ds = \\ & \int_{t_1}^{t_2} \left[ (g \operatorname{sen} \alpha_s A \bar{\zeta} \pm C_M Q^2 / A)_{s_2} - (g \operatorname{sen} \alpha_s A \bar{\zeta} \pm C_M Q^2 / A)_{s_1} \right] dt + \\ & g \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} A (\operatorname{sen} \alpha_n - \operatorname{sen} \alpha_f) ds dt \end{aligned} \quad (3.65)$$

*Forma diferencial*

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[ (Cr \pm C_M) Q^2 / A + g \operatorname{sen} \alpha_s A \bar{\zeta} \right] + \frac{\partial Q}{\partial t} = gA (\operatorname{sen} \alpha_n - \operatorname{sen} \alpha_f) \quad (3.66)$$

En este orden de ideas, asumiendo que se presentan las condiciones que satisfacen las ecuaciones (3.60) y (3.61), tomando en cuenta que  $I_1 = \rho g \operatorname{sen} \alpha_s A \bar{\zeta}$ ,  $\rho = \text{cte.}$ ,  $C_r = 1$ ,  $C_M = 0$ ,  $\operatorname{sen} \alpha_s = \cos \alpha_n \cong 1$  y adoptando  $Q = Au$ , se tiene:

*Forma integral*

$$\int_{t_1}^{t_2} [(Q^2 / A)_{s_2} - (Q^2 / A)_{s_1}] dt + \int_{s_1}^{s_2} (Q_{t_2} - Q_{t_1}) ds = \quad (3.67)$$

$$- g \int_{t_1}^{t_2} [(A\bar{\zeta})_{s_2} - (A\bar{\zeta})_{s_1}] dt + g \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} A(s_o - s_f) ds dt$$

*Forma diferencial*

$$\frac{\partial}{\partial s} (Q^2 / A + g A \bar{\zeta}) + \frac{\partial Q}{\partial t} = gA(s_o - s_f) \quad (3.68)$$

### 3.4.2 Versiones no conservativas

Las ecuaciones no conservativas, a diferencia de las conservativas, no pueden ser aplicables en regiones de flujo que presenten discontinuidades en alguna de las variables hidráulicas, es decir, no deben ser utilizadas para el estudio de fenómenos como el salto hidráulico u ondas de Mach en los cuales se presentan discontinuidades especiales del área hidráulica. Estas versiones incluyen únicamente las formas diferenciales.

#### Conservación de masa

Por la relación  $Q = A u$ , la Ecuación 3.63 también puede escribirse como:

$$\frac{\partial(Au)}{\partial s} + \frac{\partial A}{\partial t} = ql(s, t)$$

Desarrollando las derivadas, se obtiene la expresión no conservativa correspondiente:

$$A \frac{\partial u}{\partial s} + u \frac{\partial A}{\partial s} + \frac{\partial A}{\partial t} = ql(s, t) \quad (3.69)$$

### Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento

Aplicando el teorema de Leibnitz para la derivación de una integral, se cumple:

$$\frac{\partial}{\partial s} \int_0^{d_o} \sigma(d_o - \eta) d\eta = \int_0^{d_o} \frac{\partial}{\partial s} \{ [d(s) - \eta] \sigma_{(s,n)} \} d\eta + [d(s) - d(s)] \sigma_{(s,n)} \frac{\partial d}{\partial s} - d(s) \sigma_{(s,n)} \frac{\partial \sigma}{\partial s}$$

Suponiendo canal prismático  $\frac{\partial \sigma}{\partial s} = 0$ , la expresión anterior se reduce a:

$$\frac{\partial}{\partial s} \int_0^{d_o} \sigma(d_o - \eta) d\eta = \frac{\partial d}{\partial s} \int_0^{d_o} \sigma d\eta = A \frac{\partial d}{\partial s} \quad (3.70)$$

Si, por otra parte

$$\frac{\partial I_1}{\partial s} = \frac{\partial \left[ \rho g \operatorname{sen} \alpha_s \int_0^{d_o} \sigma(d_o - \eta) d\eta \right]}{\partial s}$$

Desarrollando las derivadas y tomando en cuenta las relaciones (3.64) y (3.70), se tiene que:

$$\frac{\partial I_1}{\partial s} = \rho g \operatorname{sen} \alpha_s A \frac{\partial d}{\partial s} + \rho g A \bar{\zeta} \frac{\partial (\operatorname{sen} \alpha_s)}{\partial s} \quad (3.71)$$

Sustituyendo (3.71) en (3.59) y derivando, se obtiene la forma general diferencial no conservativa de la ecuación de cantidad de movimiento:

$$\begin{aligned} (C_r \pm C_M) A \frac{\partial u^2}{\partial s} + (C_r \pm C_M) u^2 \frac{\partial A}{\partial s} + Au^2 \frac{\partial}{\partial s} (C_r \pm C_M) + A \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial A}{\partial t} + \\ g \operatorname{sen} \alpha_s A \frac{\partial d}{\partial s} + g A \bar{\zeta} \frac{\partial (\operatorname{sen} \alpha_s)}{\partial s} = gA(\operatorname{sen} \alpha_n - \operatorname{sen} \alpha_f) \end{aligned} \quad (3.72)$$

Para el caso particular en que se satisface la Ecuación 3.61, tomando en cuenta que  $\operatorname{sen} \alpha_s = \cos \alpha_n \cong 1$ ,  $C_r = 1$ ,  $C_M = 0$ ,  $\operatorname{sen} \alpha_n = s_o$ ,  $\operatorname{sen} \alpha_f = s_f$  y  $\rho = \text{constante}$ , resulta:

$$\frac{\partial}{\partial s} (Au^2) + \frac{\partial (Au)}{\partial t} + g A \frac{\partial d}{\partial s} = g A (s_o - s_f) \quad (3.73)$$

o bien, siendo  $Q = A u$

$$\frac{\partial}{\partial s} (Q^2 / A) + \frac{\partial Q}{\partial t} + g A \frac{\partial d}{\partial s} = gA(s_o - s_f) \quad (3.74)$$

### 3.5 Ecuaciones de Saint-Venant

Las ecuaciones de Saint-Venant (1871) son probablemente las más conocidas y empleadas para el análisis del flujo transitorio en canales. Corresponden al grupo de ecuaciones no conservativas y su deducción se puede obtener en la forma que se muestra a continuación.

Si en la Ecuación 3.74 se sustituye

$$Q = A u$$

y se procede a desarrollar las derivadas, resulta:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{A}{u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial Q}{\partial s} - u \frac{\partial A}{\partial s} + g \frac{A}{u} \frac{\partial d}{\partial s} = g \frac{A}{u} (s_o - s_f) \quad (3.75)$$

De la ecuación de conservación de masa (3.63) se satisface:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = ql(s, t) - \frac{\partial Q}{\partial s}$$

Por lo que al reemplazar en (3.75) se obtiene:

$$\frac{A}{u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} - u \frac{\partial A}{\partial s} + g \frac{A}{u} \frac{\partial d}{\partial s} = g \frac{A}{u} (s_o - s_f) - ql(s, t) \quad (3.76)$$

Por otra parte, con

$$Q = Au$$

se cumple

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = u \frac{\partial A}{\partial s} + A \frac{\partial u}{\partial s}$$

de donde

$$u \frac{\partial A}{\partial s} = \frac{\partial Q}{\partial s} - A \frac{\partial u}{\partial s} \quad (3.77)$$

Al sustituir (3.77) en (3.76) y multiplicar la ecuación resultante por  $u/A$ , se obtiene:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s} + g \frac{\partial d}{\partial s} = g(s_o - s_f) - \frac{u}{A} ql(s, t) \quad (3.78)$$

Esta ecuación y la (3.69) constituyen las llamadas ecuaciones de Saint-Venant.

#### Ecuación de conservación de masa (Saint-Venant)

$$A \frac{\partial u}{\partial s} + u \frac{\partial A}{\partial s} + \frac{\partial A}{\partial t} = ql(s, t)$$

### Ecuación de cantidad de movimiento (Saint-Venant)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s} + g \frac{\partial d}{\partial s} = g(s_o - s_f) - \frac{u}{A} ql(s, t)$$

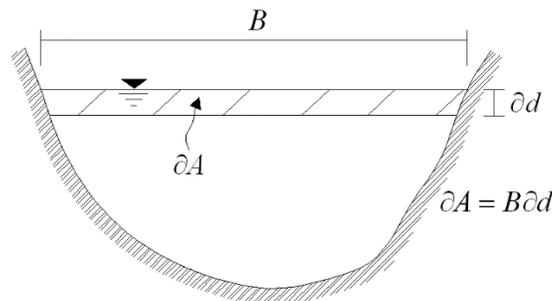
### 3.6 Ecuaciones características

El método de las características es una de las herramientas matemáticas más comúnmente empleadas en la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales parciales. Esta técnica consiste en transformar el sistema de ecuaciones diferenciales parciales en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, con lo que el problema de solución, en algunos casos, se llega a simplificar a tal grado que incluso se puede obtener la integración analítica. Para el caso en estudio se puede aplicar esta metodología a las ecuaciones no conservativas, de manera que el par de ecuaciones diferenciales parciales se transforma a un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales ordinarias (Abbott, 1975). Desarrollando las derivadas de la Ecuación 3.74 se obtiene:

$$\frac{\partial Q}{\partial s} + 2 \frac{Q}{A} \frac{\partial A}{\partial s} - \frac{Q^2}{A^2} \frac{\partial A}{\partial s} + g A \frac{\partial d}{\partial s} = gA(s_o - s_f) \quad (3.79)$$

De la **Figura 3.6** se puede ver que

$$\frac{\partial d}{\partial s} = \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial s}$$



**Figura 3.6** Relaciones geométricas

Y si  $u = Q/A$ , entonces la Ecuación 3.79 se puede escribir en la forma siguiente:

$$\frac{\partial Q}{\partial s} + 2u \frac{\partial Q}{\partial s} + \left( g \frac{A}{B} - u^2 \right) \frac{\partial A}{\partial s} = g A (s_o - s_f) \quad (3.80)$$

Por otra parte, se puede demostrar que la celeridad  $c$  de una onda de pequeña amplitud es igual a:

$$c = \left( g \frac{A}{B} \right)^{1/2} \quad (3.81)$$

Al sustituir (3.81) en (3.80) resulta:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + 2u \frac{\partial Q}{\partial s} + (c^2 - u^2) \frac{\partial A}{\partial s} - g A (s_o - s_f) = 0 = L_1 \quad (3.82)$$

La Ecuación 3.63 se puede escribir también en la forma:

$$\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial A}{\partial s} - ql(s, t) = 0 = L_2 \quad (3.83)$$

Proponiendo una relación lineal entre las ecuaciones (3.82) y la (3.83), de tal manera que se satisfaga la igualdad:

$$L_1 + \lambda L_2 = 0$$

En donde  $\lambda$  se establece y conoce como la función característica que se debe incorporar para que se satisfaga matemáticamente esta relación lineal.

Al sustituir (3.82) y (3.83) en la citada relación lineal, se obtiene:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + 2u \frac{\partial Q}{\partial s} + (c^2 - u^2) \frac{\partial A}{\partial s} - g A (s_o - s_f) + \lambda \left( \frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial A}{\partial s} - ql(s, t) \right) = 0$$

Factorizando términos de variables comunes y ordenando, resulta:

$$\left[ \frac{\partial Q}{\partial t} + (2u + \lambda) \frac{\partial Q}{\partial s} \right] + \lambda \left[ \frac{\partial A}{\partial s} + \frac{(c^2 - u^2)}{\lambda} \frac{\partial A}{\partial s} \right] - g A (s_o - s_f) - \lambda ql(s, t) = 0 \quad (3.84)$$

Si por definición de derivada total para una variable cualquiera  $f = f(s, t)$  se cumple

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial s} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (3.85)$$

se obtienen, al realizar el análisis y la comparación de los elementos contenidos en los paréntesis rectangulares de la Ecuación 3.84 con respecto a los de la Ecuación 3.85, los siguientes resultados.

Del primer paréntesis

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + (2u + \lambda) \frac{\partial Q}{\partial s} \quad (3.86)$$

Válida si se cumple

$$\frac{ds}{dt} = 2u + \lambda \quad (3.87)$$

Del segundo paréntesis

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{(c^2 - u^2)}{\lambda} \frac{\partial A}{\partial t} \quad (3.88)$$

Válida si se cumple la relación

$$\frac{ds}{dt} = \frac{(c^2 - u^2)}{\lambda} \quad (3.89)$$

Igualando (3.87) con (3.89) resulta

$$2u + \lambda = \frac{(c^2 - u^2)}{\lambda}$$

Resolviendo para  $\lambda$

$$\lambda = -u + c \quad (3.90)$$

$$\lambda = -u - c \quad (3.91)$$

Sustituyendo (3.90) y (3.91) en (3.84), se obtienen las direcciones características positivas (+) y negativa (-). De la sustitución de (3.90)

$$\frac{ds^+}{dt} = u + c \quad (3.92)$$

De la sustitución de (3.91)

$$\frac{ds^-}{dt} = u - c \quad (3.93)$$

Adicionalmente, al sustituir (3.90) y (3.91) en (3.84), habiendo tomado en cuenta la definición de derivada total, se obtienen las ecuaciones siguientes:

$$\frac{dQ}{dt} - (u - c) \frac{dA}{dt} = gA(s_o - s_f) - (u - c) ql(s, t) \quad (3.94)$$

la cual es válida con (3.92), es decir, a lo largo de la característica positiva, y

$$\frac{dQ}{dt} - (u + c) \frac{dA}{dt} = gA(s_o - s_f) - (u + c) ql(s, t) \quad (3.95)$$

la cual es válida con (3.93), es decir, a lo largo de la característica negativa.

El sistema de ecuaciones de (3.92) a (3.95) se conoce como ecuaciones características y representa, por medio de ecuaciones diferenciales ordinarias, el sistema de ecuaciones diferenciales parciales formado por las ecuaciones (3.63) y (3.74). Resalta que, si en (3.94) y (3.95) se sustituye  $Q = uA$ , se desarrollan las derivadas, se adopta la sección rectangular  $B = b = \text{constante}$  y adicionalmente se considera  $ql = 0$ , resulta:

$$\frac{d}{dt}(u + 2c) = g(s_o - s_f) \quad (3.96)$$

$$\frac{d}{dt}(u - 2c) = g(s_o - s_f) \quad (3.97)$$

Estas ecuaciones conjuntamente con las ecuaciones (3.92) y (3.93), forman el sistema de ecuaciones características que se suelen encontrar en la literatura básica.

### 3.7 Ecuaciones adimensionales para malla fija

En diversos casos, para facilitar el análisis y mejorar la interpretación físico-matemática de un fenómeno, resulta conveniente adimensionalizar las ecuaciones que lo representan. Esta transformación permite obtener un conjunto de números adimensionales, a través de los cuales es posible caracterizar el comportamiento físico del sistema. En algunos casos resulta conveniente solucionar las ecuaciones adimensionales, debido a que la interpretación de los resultados abarca un amplio campo del comportamiento de las diversas variables que intervienen en los fenómenos que se pueden estudiar a través de las ecuaciones originales. Una forma de adimensionalizar las ecuaciones no conservativas para flujo unidimensional a superficie libre es la que se indica a continuación (Liggett y Cunge, 1975).

Si se adoptan las variables adimensionales siguientes

$$Q^* = Q/Q_o, \quad d^* = d/d_o, \quad s^* = s/l_o, \quad t^* = \frac{Q_o}{A_o l_o} t, \quad (3.98)$$

$$A^* = A/A_o \quad \text{y} \quad q^* = ql(s,t)/q_o$$

en donde las variables con subíndices  $o$  corresponden a características hidráulicas asociadas a condiciones de flujo conocidas, por ejemplo, a condiciones de flujo uniforme o de régimen crítico, se satisfacen las relaciones siguientes:

$$\frac{\partial}{\partial s} (Q^2/A) = \frac{Q_o^2}{A_o l_o} \frac{\partial}{\partial s^*} (Q^{*2}/A^*) \quad (3.99)$$

$$\frac{\partial d}{\partial s} = \frac{d_o}{l_o} \frac{\partial d^*}{\partial s^*} \quad (3.100)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = \frac{Q_o^2}{A_o l_o} \frac{\partial Q^*}{\partial t^*} \quad (3.101)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{Q_o}{l_o} \frac{\partial A^*}{\partial t^*} \quad (3.102)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = \frac{Q_o}{l_o} \frac{\partial Q^*}{\partial s^*} \quad (3.103)$$

Adoptando la ecuación de Manning para evaluar  $s_f$

$$s_f = \frac{n^2 Q_o^2 Q^{*2}}{A_o^2 A^{*2} Rh_o^{4/3} Rh^{*4/3}} = K \frac{Q^{*2}}{A^{*2} Rh^{*4/3}} \quad (3.104)$$

en donde

$$K = \frac{n^2 Q_o^2}{A_o^2 Rh_o^{4/3}}$$

Sustituyendo las relaciones (3.91) a (3.104) en (3.63) y (3.74), se obtiene:

### Ecuación de conservación de masa

$$\frac{\partial Q^*}{\partial s^*} + \frac{\partial A^*}{\partial t^*} = q_o q^*(s, t) \frac{l_o}{Q_o} \quad (3.105)$$

### Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento

$$\frac{\partial}{\partial s^*} (Q^{*2} / A^*) + \frac{\partial Q^*}{\partial t^*} + \frac{A^*}{Fr_o^2} \frac{\partial d^*}{\partial s} = A^* \frac{l_o}{Fr_o^2 d_o} \left( s_o - K \frac{Q^{*2}}{A^{*2} Rh^{*4/3}} \right) \quad (3.106)$$

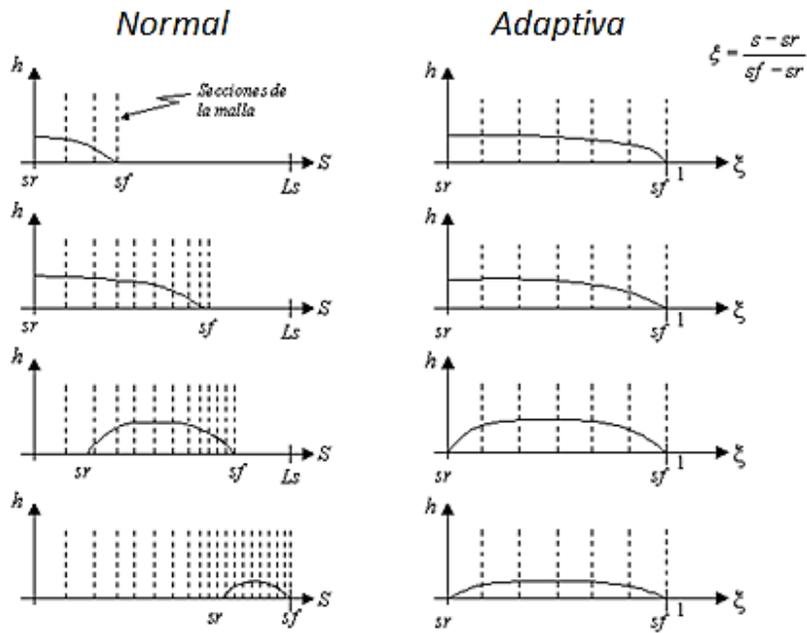
en donde se ha asignado

$$Fr_o^2 = \frac{Q_o^2}{A_o^2 g d_o} \quad (3.107)$$

## 3.8 Ecuaciones transformadas para malla adaptiva

En general las ecuaciones diferenciales parciales que representan el flujo unidimensional a superficie libre no pueden ser solucionadas analíticamente, por lo que es necesario recurrir a soluciones numéricas basadas en técnicas discretas de solución, como los métodos en diferencias finitas y elemento finito. Para simular el flujo transitorio a superficie libre con fronteras móviles, normalmente se emplean esquemas discretos de solución numérica cuya malla se incrementa a través del tiempo debido al propio crecimiento o decrecimiento de la región de flujo que representa. De aquí que, desde el punto de vista computacional, a medida que se avanza en la solución sea necesario utilizar también mayores tiempos de cómputo.

Para simplificar este problema se recomienda usar una transformación adimensional de la coordenada espacial (Aldama y Martínez, 1988), que hace posible el empleo de una malla adaptiva, es decir una malla que se adapta a la región de flujo sin importar que se deforme dicha región debido al desplazamiento de sus fronteras. En la **Figura 3.7** se presenta una comparación gráfica que muestra las características de adaptación de una malla normal y otra adaptiva a una región de flujo que crece y decrece a través del tiempo sobre un canal. A continuación, se desarrollan las ecuaciones de conservación transformadas para malla adaptiva (García, 1994).



**Figura 3.7** Representación del fenómeno en diferentes mallas

Para este caso conviene definir dos nuevas variables:

$$\tau = t \tag{3.108}$$

$$\xi = \frac{s - sr}{sf - sr} \tag{3.109}$$

en donde

$sf$  = posición del frente de avance

$sr$  = posición de la retaguardia

La idea es transformar las ecuaciones fundamentales (3.82) y (3.83) con estas nuevas variables. En particular, la variable  $\xi$  permitirá tener un dominio que permanece con una magnitud unitaria independiente del proceso de expansión o reducción de la región de flujo originada por el desplazamiento de sus fronteras  $sf$  y  $sr$ . De acuerdo con esta idea las derivadas espaciales y temporales de las ecuaciones de conservación de masa y cantidad de movimiento se pueden expresar de la siguiente forma:

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = \frac{\partial Q}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial s} = \frac{1}{sf - sr} \frac{\partial Q}{\partial \xi} \quad (3.110)$$

$$\frac{\partial A}{\partial s} = \frac{1}{sf - sr} \frac{\partial A}{\partial \xi} \quad (3.111)$$

Por otra parte

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \left( \frac{\partial A}{\partial t} \right)_s = \frac{\partial A}{\partial \tau} + \frac{\partial A}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

en donde

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{s - sr}{sf - sr} \right) = - \frac{s - sr}{(sf - sr)^2} \frac{dsf}{dt} + \left[ \frac{s - sr}{(sf - sr)^2} - \frac{1}{sf - sr} \right] \frac{dsr}{dt}$$

tomando en cuenta (3.121) y asignando

$$v = - \frac{\xi}{(sf - sr)} \frac{dsf}{dt} + \left[ \frac{\xi}{sf - sr} - \frac{1}{sf - sr} \right] \frac{dsr}{dt} \quad (3.112)$$

resulta

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \left( \frac{\partial A}{\partial t} \right)_s = \frac{\partial A}{\partial \tau} + v \frac{\partial A}{\partial \xi} \quad (3.113)$$

Similarmente

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial \tau} + v \frac{\partial Q}{\partial \xi} \quad (3.114)$$

Sustituyendo (3.110) y (3.112) en (3.83) se obtiene la ecuación de conservación de masa transformada:

$$\frac{\partial A}{\partial \tau} + v \frac{\partial A}{\partial \xi} + \frac{1}{sf - sr} \frac{\partial Q}{\partial \xi} = ql(\xi, \tau) \quad (3.115)$$

Aquí se ha adoptado  $ql(s, t) = ql(\xi, \tau)$ , en el entendido que  $s = s_r + \xi(s_f - s_r)$  y que, en consecuencia, en la solución de las ecuaciones adimensionalizadas para malla adaptativa, se deberá introducir el valor de la aportación o extracción de masa  $ql$  correspondiente a la posición  $(\xi, \tau)$  del espacio transformado.

Sustituyendo (3.110), (3.111) y (3.113) en (3.82), tomando en cuenta que

$$\xi = \frac{s - sr}{sf - sr}$$

y operando algebraicamente, se obtiene la ecuación de conservación de cantidad de movimiento transformada:

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau} + \left( v + \frac{2u}{sf - sr} \right) \frac{\partial Q}{\partial \xi} + \frac{c^2 - u^2}{sf - sr} \frac{\partial A}{\partial \xi} = g A(s_o - s_f) \quad (3.116)$$

En estas ecuaciones, la longitud del perfil de flujo en el plano transformado adimensional permanece constante. La distancia adimensional  $\xi$  está siempre comprendida entre cero y uno, es decir, tiene longitud máxima adimensional unitaria.

### 3.9 Ecuaciones adimensionales para malla adaptativa

Para este caso se introducen las variables adimensionales

$$Q^* = \frac{Q}{Q_o}, \quad A^* = \frac{A}{A_o}, \quad q^* = \frac{ql(\xi, \tau)}{q_o} \quad \text{y} \quad \tau^* = \frac{Q_o}{A_o l_o} \tau$$

De aquí que se satisfagan las relaciones siguientes:

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi} = Q_o \frac{\partial Q^*}{\partial \xi} \quad (3.117)$$

$$\frac{\partial A}{\partial \xi} = A_o \frac{\partial A^*}{\partial \xi} \quad (3.118)$$

$$\frac{\partial A}{\partial \tau} = \frac{Q_o}{l_o} \frac{\partial A^*}{\partial \tau^*} \quad (3.119)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau} = \frac{Q_o^2}{A l_o} \frac{\partial Q^*}{\partial \tau^*} \quad (3.120)$$

$$\frac{dsf}{dt} = \frac{Q_o}{A l_o} \frac{dsf}{d\tau^*} \quad (3.121)$$

$$\frac{dsr}{dt} = \frac{Q_o}{A l_o} \frac{dsr}{d\tau^*} \quad (3.122)$$

Y al igual que en el Apartado 3.7 se adopta:

$$s_f = K \frac{Q^{*2}}{A^{*2} Rh^{*4/3}}$$

De aquí que al hacer las sustituciones correspondientes en (3.127) y (3.128) resulte que las ecuaciones adimensionales transformadas para malla adaptiva sean:

### Conservación de masa

$$\frac{\partial A^*}{\partial \tau^*} + \left[ -\frac{\xi}{sf - sr} \frac{dsf}{d\tau^*} + \frac{(\xi - 1)}{sf - sr} \frac{dsr}{d\tau^*} \right] \frac{\partial A^*}{\partial \xi} + \frac{\partial Q^*}{\partial \xi} = \frac{l_o}{Q_o} q_o q^*(\xi, \tau) \quad (3.123)$$

### Conservación de cantidad de movimiento

$$\frac{Q_o^2}{A_o} \frac{\partial Q^*}{\partial \tau^*} + \left[ \frac{Q_o}{A_o} \left( -\frac{\xi}{sf - sr} \frac{dsf}{d\tau^*} + \frac{(\xi - 1)}{sf - sr} \frac{dsf}{d\tau^*} \right) + \frac{2l_o u_o u^*}{sf - sr} \right] Q_o \frac{\partial Q^*}{\partial \xi} +$$

$$\frac{l_o}{sf - sr} \left( c_o^2 c_*^2 - u_o^2 u_*^2 \right) A_o \frac{\partial A^*}{\partial \xi} = g A_o A^* l_o \left( s_o - K \frac{Q^{*2}}{A^{*2} Rh^{*4/3}} \right)$$

Tomado en cuenta que  $u_o = Q_o / A_o$  y realizando operaciones algebraicas se obtiene:

$$\frac{\partial Q^*}{\partial \tau^*} + \left[ \left( -\frac{\xi}{sf - sr} \frac{dsf}{d\tau^*} + \frac{(\xi - 1)}{sf - sr} \frac{dsf}{d\tau^*} \right) + \frac{2l_o u^*}{sf - sr} \right] \frac{\partial Q^*}{\partial \xi} + \quad (3.124)$$

$$\frac{(c_o^2 c_*^2 - u_o^2 u_*^2)}{sf - sr} \frac{l_o}{gFr_o^2} \frac{\partial A^*}{\partial \xi} = \frac{sf - sr}{Fr_o^2} A^* \left( s_o - K \frac{Q^{*2}}{A^{*2} Rh^{*4/3}} \right)$$

en donde

$$Fr_o^2 = \frac{Q_o^2}{A_o^2 g l_o}$$

### 3.10 Ecuaciones características para malla adaptiva

Proponiendo una relación lineal entre las ecuaciones (3.114) y (3.115), de la misma forma que en el Apartado 3.6, se obtiene:

(3.125)

$$\left[ \frac{\partial Q}{\partial \tau} + \left( v + \frac{2u}{sf - sr} + \frac{\lambda}{sf - sr} \right) \frac{\partial Q}{\partial \xi} \right] + \lambda \left[ \frac{\partial A}{\partial \tau} + \left( v + \frac{c^2 - u^2}{\lambda(sf - sr)} \right) \frac{\partial A}{\partial \xi} \right] = gA(s_o - s_f) + \lambda ql(\xi, \tau)$$

De aquí que al analizar el contenido de los paréntesis rectangulares se cumplan las siguientes relaciones.

Del primer paréntesis:

$$\frac{dQ}{d\tau} = \frac{\partial Q}{\partial \tau} + \left( v + \frac{2u}{sf - sr} + \frac{\lambda}{sf - sr} \right) \frac{\partial Q}{\partial \xi} \quad (3.126)$$

válida si se satisface:

$$\frac{d\xi}{d\tau} = v + \frac{2u}{sf - sr} + \frac{\lambda}{sf - sr} \quad (3.127)$$

Del segundo paréntesis:

$$\frac{dA}{d\tau} = \frac{\partial A}{\partial \tau} + \left( v + \frac{c^2 - u^2}{\lambda(sf - sr)} \right) \frac{\partial A}{\partial \xi} \quad (3.128)$$

válida si se satisface:

$$\frac{d\xi}{d\tau} = v + \frac{c^2 u^2}{\lambda(sf - sr)} \quad (3.129)$$

Igualando (3.126) con (3.128) resulta:

$$\lambda^2 + 2 u \lambda - (c^2 - u^2) = 0 \quad (3.130)$$

resolviendo para  $\lambda$

$$\lambda = c - u \quad (3.131)$$

$$\lambda = -c - u \quad (3.132)$$

Nótese que estos valores son los mismos que los obtenidos en el subcapítulo 3.6.

Sustituyendo (3.143) y (3.144) en (3.141), se obtienen las direcciones características positiva (+) y negativa (-):

$$\frac{d\xi^+}{d\tau} = v + \frac{(c+u)}{sf - sr} \quad (3.133)$$

$$\frac{d\xi^-}{d\tau} = v - \frac{(c+u)}{sf - sr} \quad (3.134)$$

Por otra parte, al sustituir (3.132) y (3.133) en (3.124) y habiendo tomado en cuenta la definición de derivada total, se obtienen las mismas ecuaciones indicadas con los números (3.94) y (3.95), pero con derivadas expresadas literalmente con respecto a  $\tau$  en lugar de  $t$ , aspecto que no cambia su representación física ya que  $\tau = t$ . De aquí se concluye que las únicas ecuaciones que cambian comparativamente con lo visto en el subcapítulo 3.6 son las correspondientes a las direcciones características, en este caso las expresiones (3.133) y (3.134). Este resultado era de esperarse ya que la transformación se realiza en el espacio y no en el tiempo.

Es también interesante observar que cuando las posiciones  $sf$  y  $sr$  permanecen constantes, las ecuaciones (3.133) y (3.134) se simplifican y se obtienen las relaciones (3.92) y (3.93) respectivamente.

### 3.10.1 Velocidad de crecimiento de la región de flujo

Del análisis de las ecuaciones (3.133) y (3.134) se observa que la velocidad con que se transmite la información dentro de una región de flujo depende de la velocidad con que la propia región de flujo crece o decrece, es decir, depende de su velocidad de expansión o contracción. Si se multiplica  $v$  (Ecuación 3.111) por  $-(sf - sr)$  se obtiene lo que en adelante se denominará como velocidad de desplazamiento de las secciones transversales y fronteras de la región de flujo con  $\xi$  constante ( $w_s$ )

$$w_s = \xi \frac{dsf}{dt} + (1 - \xi) \frac{dsr}{dt}$$

La interpretación física de  $w_s$  se comprende al considerar que en cualquier instante la posición  $s$  de una sección en el dominio físico correspondiente a una  $\xi$  fija en el dominio adimensional se puede expresar, de acuerdo con la relación (3.109), en función de la posición de las fronteras  $sf$  y  $sr$  como sigue:

$$s = [sf(\tau) - sr(\tau)] \xi + sr(\tau)$$

Al derivar esta relación parcialmente respecto a  $\tau$ , es decir, manteniendo fijo  $\xi$ , se obtiene

$$\left( \frac{\partial s}{\partial \tau} \right)_{\xi} = \frac{d(sf - sr)}{d\tau} \xi + \frac{dsr}{d\tau} \equiv w_s$$

Con este resultado se aclara el significado físico de la velocidad  $w_s$ . Esta velocidad tiene una serie de características propias a través de las cuales se pueden obtener una serie de importantes conclusiones, como son:

a) En la frontera izquierda  $\xi = 0$ , por lo que la velocidad de desplazamiento  $w_s$  de esa sección corresponde a la velocidad con que la retaguardia de la región de flujo superficial se mueve:

$$w_s = \frac{dsr}{dt}$$

b) En la frontera derecha  $\xi = 1$ , por lo que la velocidad de desplazamiento  $w_s$  de esa sección corresponde a la velocidad con que el frente de la región de flujo superficial se mueve:

$$w_s = \frac{dsf}{dt}$$

c) Respecto al valor de la magnitud de la velocidad, al multiplicar las ecuaciones (3.133) y (3.134) por la longitud de la región de flujo  $(sf - sr)$  y reemplazando  $v(sf - sr)$  por  $-w_s$ , se obtiene:

$$(sf - sr) \frac{d\xi^+}{d\tau} = -w_s + u + c$$

$$(sf - sr) \frac{d\xi^-}{d\tau} = -w_s + u - c$$

De aquí que si en ambas fronteras  $\xi = \text{cte.}$  ( $\xi = 0$  y  $\xi = 1$ ), es decir,  $\frac{d\xi}{dt} = 0$ , se cumplan las siguientes relaciones:

Por la característica positiva

$$w_s = u + c$$

Por la característica negativa

$$w_s = u - c$$

Si se considera que las fronteras se mueven con un frente en el cual  $c \rightarrow 0$ , resulta:

$$w_s = u$$

De este resultado, en combinación con los presentados en los incisos a) y b), se concluye que bajo estas condiciones la velocidad con que se mueve el flujo en las fronteras es igual a la velocidad con que dichas fronteras se desplazan:

$$\frac{dsr}{dt} = u$$

y

$$\frac{dsf}{dt} = u$$

Como complemento a estos resultados en los subcapítulos 4.3 y 4.4 se obtienen las ecuaciones que definen la velocidad con que se mueven estas fronteras bajo estas mismas condiciones y, en consecuencia, la velocidad del flujo en las mismas.

d) Con el análisis realizado en los incisos anteriores (*a*, *b* y *c*) se ve la influencia que la velocidad de desplazamiento  $w_s$  tiene en la velocidad de propagación de la información a través de las direcciones características. Esta situación difícilmente se podría haber encontrado sin el empleo de la transformación adimensional para malla adaptiva de las ecuaciones fundamentales.

### 3.11 Ecuaciones para flujo en estado permanente

El diseño de un canal y la generación de un modelo de simulación numérica del mismo parten de una serie de criterios prácticos y del establecimiento de ciertas condiciones de frontera que tienen su origen en el comportamiento y régimen de flujo que teóricamente se podrían llegar a presentar en estado permanente. De aquí que en el campo de la ingeniería hidráulica el estudio y la aplicación de las ecuaciones que rigen el flujo permanente en canales sea de gran interés en la práctica profesional (Rodríguez, 2008; Sotelo, 2009; Villón, 2007).

#### 3.11.1 Clasificación de flujos

Desde el punto de vista práctico, resulta adecuado establecer una clasificación de tipos de flujo (Chow, 1982) tal que, con auxilio de una serie de suposiciones simplificadoras, permita hacer una distinción de las diferentes formas o estados en que se presenta el flujo a superficie libre en la realidad.

El flujo unidimensional a superficie libre puede ser clasificado con base en diferentes criterios, la más aceptada y conocida es posiblemente la siguiente:

Tipo de flujo	Criterio de clasificación
Permanente y no permanente	Tiempo
Uniforme y variado	Espacio
Laminar y turbulento	Fuerzas viscosas
Subcrítico y supercrítico	Fuerza de gravedad

#### a) Flujo permanente

Las características hidráulicas (velocidad, tirante y gasto) en cualquier sección transversal del canal permanecen constantes todo el tiempo o durante un lapso específico.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial t} = 0$$

**b) Flujo no permanente**

Las características hidráulicas en una sección transversal varían de un instante a otro.

$$\frac{\partial u}{\partial t} \neq 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial t} \neq 0, \quad \frac{\partial h}{\partial t} \neq 0$$

**c) Flujo uniforme**

Las características hidráulicas permanecen constantes a lo largo del canal. Este tipo de flujo se puede presentar en la práctica solamente en estado permanente.

$$\frac{\partial u}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial s} = 0$$

**d) Flujo variado**

La velocidad media y el tirante cambian a lo largo del canal:

$$\frac{\partial u}{\partial s} \neq 0, \quad \frac{\partial h}{\partial s} \neq 0$$

En este tipo de flujo existe una subclasificación.

		Permanente	No permanente
Flujo variado	$\left\{ \begin{array}{l} \text{gradualmente} \\ \text{rápidamente} \\ \text{espacialmente} \end{array} \right.$	$\partial Q / \partial s = 0$	$\partial Q / \partial s \neq 0$
		$\partial Q / \partial s = 0$	$\partial Q / \partial s \neq 0$
		$\partial Q / \partial s \neq 0$	$\partial Q / \partial s \neq 0$

La diferencia principal entre un flujo gradualmente variado y otro rápidamente variado radica en que para el primer caso se presenta una variación gradual de los tirantes a lo largo del canal y en el segundo caso dicha variación se presenta bruscamente entre dos secciones consecutivas o en un tramo muy corto (caso típico de un salto hidráulico).

**e) Flujo laminar y turbulento**

Con relación a la influencia de la viscosidad, el flujo puede ser laminar, de transición o turbulento. La influencia de la viscosidad se mide a través del número de Reynolds.

$$Re = \frac{uRh}{\nu}$$

---

En la práctica se aceptan los siguientes rangos de clasificación:

*flujo laminar*                       $Re < 500 - 600$

*flujo de transición*               $500 < Re < 2000$

*flujo turbulento*                  $Re > 2000$

El escurrimiento en canales por lo general se presenta en régimen turbulento y muy raras veces en forma laminar, debido principalmente a la baja viscosidad del agua. En lo que sigue de este trabajo se considera que el flujo es siempre turbulento a menos que se especifique lo contrario.

### **f) Flujo subcrítico y supercrítico**

Por lo que se refiere a la preponderancia de las fuerzas gravitatorias, existe también una clasificación, la cual queda definida por el número de Froude.

$$Fr = \frac{u}{\sqrt{gY}}$$

El flujo se clasifica en:

*subcrítico*                       $Fr < 1$

*crítico*                          $Fr = 1$

*supercrítico*                  $Fr > 1$

### **3.11.2 Ecuaciones clásicas para estado permanente**

De manera habitual en la literatura clásica sobre hidráulica de canales (Chow, 1982) se desarrolla la deducción aislada de cada una de las ecuaciones que representan los diferentes tipos de flujo. Esta presentación puede dar la impresión de que cada uno de los tipos de flujo que representan no tienen una relación bien definida. El objetivo de este inciso es presentar una deducción secuencial y ordenada de las ecuaciones que representan los tipos de flujo permanente a superficie libre más comunes, de tal manera que se pueda identificar la forma en que están relacionadas físicamente, lo cual permitirá definir los tipos de problemas que se podrán solucionar con cada una de ellas, y en consecuencia sus ventajas y limitaciones.

### 3.11.2.1 Flujo espacialmente variado

#### Conservación de masa

La Ecuación 3.63 para flujo permanente se reduce a:

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = ql(s) \quad (3.135)$$

#### Conservación de la cantidad de movimiento

Si en (3.78), se toma en cuenta que

$$u \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial s}$$

entonces dicha ecuación se puede escribir también como:

$$\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2g} \frac{\partial u^2}{\partial s} + \frac{\partial d}{\partial s} = (s_o - s_f) - \frac{u}{gA} ql(s, t)$$

Si se adopta flujo permanente y se llama energía específica ( $E$ ) a

$$d + \frac{u^2}{2g}$$

se obtiene:

$$\frac{\partial E}{\partial s} = (s_o - s_f) - \frac{u}{gA} ql(s) \quad (3.136)$$

El último término del segundo miembro se debe a la creación de masa por efecto de la aportación lateral de gasto  $ql(s)$ . Nótese que cuando  $ql(s) = 0$ , la Ecuación 3.136 resulta ser la ecuación de la energía (Chow, 1982):

$$\frac{\partial E}{\partial s} = (s_o - s_f) \quad (3.137)$$

Por otra parte, al desarrollar el primer término de la Ecuación 3.136, se tiene

$$\frac{\partial E}{\partial s} = \frac{u}{g} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial d}{\partial s}$$

de donde, con  $u = Q / A$  :

$$\frac{\partial E}{\partial s} = \frac{u}{gA} \frac{\partial Q}{\partial s} - \frac{u Q}{gA^2} \frac{\partial A}{\partial s} + \frac{\partial d}{\partial s} \quad (3.138)$$

Tomando en cuenta que

$$\frac{\partial A}{\partial s} = B \frac{\partial d}{\partial s}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = ql(s)$$

y

$$Q = u A$$

la Ecuación 3.138 se puede expresar como:

$$\frac{\partial E}{\partial s} = \frac{u}{gA} ql(s) - \frac{u^2 B}{gA} \frac{\partial d}{\partial s} + \frac{\partial d}{\partial s} \quad (3.139)$$

Si el número de Froude se define como

$$Fr = \frac{u}{\left(g \frac{A}{B}\right)^{1/2}}$$

la Ecuación 3.139 resulta ser

$$\frac{\partial E}{\partial s} = \frac{u}{gA} ql(s) + (1 - Fr^2) \frac{\partial d}{\partial s} \quad (3.140)$$

Sustituyendo (3.140) en (3.136), se obtiene:

$$(1 - Fr^2) \frac{\partial d}{\partial s} = (s_o - s_f) - \frac{2u}{gA} ql(s)$$

Despejando  $\frac{\partial d}{\partial s}$  y considerando que  $u = Q/A$  se obtiene la ecuación dinámica para flujo espacialmente variado:

$$\frac{\partial d}{\partial s} = \frac{(s_o - s_f) - \frac{2Q}{gA^2} ql(s)}{(1 - Fr^2)} \quad (3.141)$$

Esta ecuación es válida para aportaciones positiva o negativas del gasto lateral  $ql(s)$ , con la condición de que sean perpendiculares al flujo (García, 1989).

### 3.11.2.2 Flujo gradualmente variado

En este tipo de flujo el gasto lateral  $ql$  es nulo, por lo que las ecuaciones (3.135) y (3.141) se reducen a:

#### Ecuación de conservación de masa

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = 0 \quad (3.142)$$

**Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento** (ecuación dinámica para flujo gradualmente variado) (Chow, 1982)

$$\frac{\partial d}{\partial s} = \frac{s_o - s_f}{1 - Fr^2} \quad (3.143)$$

### 3.11.2.3 Flujo uniforme

#### Ecuación de conservación de masa

Es válida la Ecuación 3.142

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = 0$$

#### Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento

La Ecuación 3.143 también puede expresarse en la forma:

$$(1 - Fr^2) \frac{\partial d}{\partial s} = s_o - s_f$$

y siendo que para un flujo uniforme se cumple

$$\frac{\partial d}{\partial s} = 0$$

entonces la ecuación anterior se reduce a:

$$s_o = s_f \quad (3.144)$$

la cual corresponde a la ecuación general para flujo uniforme.

### 3.11.2.4 Flujo rápidamente variado (salto hidráulico)

#### Ecuación de conservación de masa

Son válidas las ecuaciones (3.135)

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = ql(s)$$

o la (3.142)

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = 0,$$

dependiendo de si existe o no aportación lateral de gasto.

#### Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento

Considerando flujo permanente en la Ecuación (3.68), se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial s} (Q^2 / A + g A \bar{\zeta}) = g A (s_o - s_f) \quad (3.145)$$

La sumatoria de los términos entre paréntesis es conocida como función momentum ( $M$ ), de tal manera que la Ecuación 3.145 también puede expresarse en la forma:

$$\frac{\partial M}{\partial s} = g A (s_o - s_f) \quad (3.146)$$

la cual corresponde a la ecuación dinámica para flujo rápidamente variado (Chow, 1982).

Cuando el canal es horizontal  $s_o = 0$  y la fricción se puede considerar despreciable  $s_f = 0$ , la Ecuación 3.146 se reduce a:

$$\frac{\partial M}{\partial s} = 0$$

Expresión que al ser integrada entre dos secciones cualesquiera  $s_1$  a  $s_2$  resulta igual con:

$$Ms_1 = Ms_2 \quad (3.147)$$

$$\left( \frac{Q^2}{A} + g A \bar{\zeta} \right)_{s_1} = \left( \frac{Q^2}{A} + g A \bar{\zeta} \right)_{s_2}$$

Relación que en la práctica corresponde a la ecuación más empleada para el estudio del fenómeno conocido como salto hidráulico.

### 3.11.2.5 Régimen crítico

Este es un estado del flujo que se presenta con energía específica mínima con respecto al tirante  $d$ , es decir, cuando se satisface la relación:

$$\frac{\partial E}{\partial d} = 0$$

Recordando que

$$E = d + \frac{u^2}{2g}$$

entonces se deberá cumplir

$$\frac{\partial}{\partial d} \left( d + \frac{u^2}{2g} \right) = 1 + \frac{u}{g} \frac{\partial u}{\partial d} = 1 + \frac{Q}{gA} \frac{\partial(Q/A)}{\partial d}$$

$$\frac{\partial}{\partial d} \left( d + \frac{u^2}{2g} \right) = 1 + \frac{Q}{gA^2} \frac{\partial Q}{\partial d} - \frac{Q^2}{gA^3} \frac{\partial A}{\partial d}$$

con

$$\partial Q / \partial d = 0$$

y

$$\partial A / \partial d = B$$

resulta:

$$\frac{\partial E}{\partial d} = 1 - \frac{B Q^2}{g A^3} = 0$$

De aquí que se cumpla la relación

$$\frac{Q^2}{g} = \frac{A^3}{B} \quad (3.148)$$

la cual corresponde a la condición de régimen crítico (Chow, 1982). Esta condición es aplicable para canales rectos, es decir, en aquellos en los que no se tiene curvatura. Aquí es de interés hacer notar que, si

$$c^2 = g \frac{A}{B}$$

y

$$u^2 = \frac{Q^2}{A^2},$$

de la Ecuación 3.148 se demuestra la igualdad

$$c^2 = u^2 \quad (3.149)$$

la cual implica que en régimen crítico la velocidad y la celeridad de onda son iguales.

### 3.11.2.6 Flujo sobre vertedores tipo cimacio

En la actualidad el estudio del flujo permanente sobre vertedores con un cierto grado de curvatura se suele realizar con auxilio de modelos matemáticos basados en la teoría de flujo con potencial (Sotelo, 1979). En este inciso se presentan las ecuaciones unidimensionales que describen este tipo de flujo; este tipo de representación unidimensional es una alternativa que simplifica la interpretación física del problema.

#### Ecuación de conservación de masa

Es aplicable la Ecuación 3.142

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = 0$$

**Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento**

Adoptando flujo permanente en la Ecuación 3.66 se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[ (Cr \pm C_M) \frac{Q^2}{A} + g \cos \alpha_n A \bar{\zeta} \right] = g A (\text{sen} \alpha_n - \text{sen} \alpha_f) \quad (3.150)$$

Esta ecuación es en general válida para el estudio de cualquier tipo de problema en canales con un cierto grado de curvatura. Sin embargo, con base en los criterios de diseño de las obras de excedencia tipo cimacio, resulta apropiado despreciar los efectos de fricción, de tal manera que la ecuación resultante sea:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[ (Cr \pm C_M) \frac{Q^2}{A} + g \cos \alpha_n A \bar{\zeta} \right] = g A \text{sen} \alpha_n \quad (3.151)$$

La cual al ser integrada entre los límites  $s_1$  y  $s_2$  se escribe en la forma:

$$\left[ (Cr - C_M) \frac{Q^2}{A} + g \cos \alpha_n A \bar{\zeta} \right]_{s_1}^{s_2} = g \int_{s_1}^{s_2} A \text{sen} \alpha_n \quad (3.152)$$

En los casos en que se desea estudiar flujos permanentes con curvatura. en los cuales existe gasto lateral y efectos de fricción considerables, las ecuaciones aplicables son:

**Conservación de masa**

Es aplicable la Ecuación 3.135

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = ql(s)$$

**Conservación de la cantidad de movimiento**

Es aplicable la Ecuación 3.150

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[ (Cr \pm C_M) \frac{Q^2}{A} + g \cos \alpha_n A \bar{\zeta} \right] = g A (\text{sen} \alpha_n - \text{sen} \alpha_f)$$



**Ecuaciones transformadas aplicadas a  
una región de flujo superficial que  
crece y decrece en el espacio y el  
tiempo**

**4**



---

## Capítulo 4

### Ecuaciones transformadas aplicadas a una región de flujo superficial que crece y decrece en el espacio y en el tiempo

**P**ara ejemplificar y generalizar este tipo de flujo, se tomará como referencia el proceso físico que ocurre durante el riego intermitente. El riego intermitente, al igual que un flujo sobre un río, está constituido por una parte superficial y una subsuperficial. A continuación, se presenta una breve descripción de las ecuaciones que lo representan.

Las ecuaciones fundamentales que describen el fenómeno en su parte superficial considerando flujo unidimensional son las expresiones completas de Saint-Venant. Para representar el flujo subsuperficial lo más apropiado sería emplear un modelo basado en la ecuación de conservación de masa y la ecuación de Darcy aplicables a medios porosos. Una ecuación que resulta de su combinación es la de Richards (1931). Para su aplicación se necesita disponer de información relacionada con las características y estados de humedad del suelo, cuya obtención requiere equipo especial que por lo general no está disponible.

La magnitud del flujo subsuperficial se puede estimar utilizando ecuaciones empíricas que tomen en cuenta el proceso de infiltración sin que se afecte considerablemente la representación del comportamiento del flujo superficial. Al respecto una de las ecuaciones más utilizadas es la de Kostiaikov-Lewis. Ante esta alternativa y bajo una serie de hipótesis simplificadoras resulta factible estudiar totalmente el problema superficial sin que sea necesario conocer a detalle el comportamiento del flujo subsuperficial.

Si bien para el caso de interés resulta factible utilizar ecuaciones empíricas para simplificar el flujo subsuperficial, en lo que se refiere al flujo superficial tales simplificaciones no son generalmente recomendables. El sustituir las ecuaciones completas de Saint-Venant por sistemas simplificados implica aceptar una serie de hipótesis restrictivas que limitan ampliamente los rangos de aplicación de los modelos de simulación resultantes.

- Los modelos de inercia-cero requieren que las aceleraciones y los efectos inerciales que influyen en la ecuación de cantidad de movimientos sean mínimos (Strelkoff y Katopodes, 1977; Elliot, Walker y Skogerboe, 1982), lo cual es cuestionable cuando se tienen pendientes de plantilla y gastos de descarga considerablemente altos.
- Otras limitaciones adicionales, a las de los modelos de inercia-cero, se presentan en los modelos de onda cinemática en los que la ecuación de cantidad de movimiento se reduce a una relación de flujo normalizado, es decir, se supone que las áreas y velocidades del flujo se hallan relacionadas por alguna expresión

---

derivada de la ecuación de Chezy, como la de Manning (Abbott, 1980). Esta situación limita directamente los modelos a sistemas de riego con pendiente mayor que cero. Por lo general, los modelos resultantes, entre ellos el propuesto por Walker y Humpherys (1983), no consideran la influencia de la condición de frontera aguas abajo de la región de flujo y por lo tanto no se puede controlar el tipo de régimen, subcrítico o supercrítico, que se presenta en la región de flujo.

- Algunos modelos de balance de volumen están basados en la ecuación de conservación de masa complementada con una relación lineal de almacenamiento-descarga (Singh y Yu-Cheng, 1988), para lo cual se requieren una serie de factores de peso que dependen del comportamiento del propio fenómeno (Elliot y Walker, 1982), es decir, que en la realidad son modelos calibrados. Se aplican únicamente a los sistemas en que se ha calibrado o en otros con características muy semejantes.

La simulación del flujo transitorio unidimensional a superficie libre con una frontera móvil implica normalmente que la malla de cualquier esquema discreto de solución numérica se incremente a través del tiempo. El fenómeno es ocasionado por efecto del propio crecimiento o decrecimiento de la región de flujo que representa. De aquí que, desde el punto de vista computacional, a medida que se avanza en la solución sea necesario utilizar mayor capacidad de memoria y, en consecuencia, también mayores tiempos de máquina.

Para simplificar la problemática, Aldama y Martínez (1988) han propuesto el uso de una transformación adimensional de la coordenada espacial, lo que permite emplear una malla que se adapta a la región de flujo sin importar que se deforme debido a la frontera móvil. Partiendo de esta idea, se pueden transformar las ecuaciones de Saint-Venant de tal forma que el número de nudos en la coordenada espacial de la región discreta en que se aplique un esquema de diferencias finitas permanezca constante a través del tiempo, y que sea por tanto independiente del crecimiento de la región de flujo. Al aplicar dicho criterio, resulta factible y adecuado simular el flujo intermitente con un modelo discreto basado en una versión transformada adimensionalmente de las ecuaciones de Saint-Venant.

## 4.1 Modelo completo

Las ecuaciones no conservativas para flujo unidimensional se pueden representar de la siguiente manera (ver expresiones 3.94 y 3.95 del apartado 3.2.6).

**Conservación de masa**

$$\frac{\partial Q}{\partial S} + \frac{\partial A}{\partial t} = ql(s, t) \quad (\text{de la 3.94})$$

**Conservación de la cantidad de movimiento**

$$\frac{\partial Q}{\partial T} + 2u \frac{\partial Q}{\partial s} + (c^2 - u^2) \frac{\partial A}{\partial s} = g A (s_o - s_f) \quad (\text{de la 3.95})$$

En la Ecuación 3.94 el término  $ql$  representa la sustracción de masa por efecto de la infiltración de flujo a través de la superficie del suelo. La infiltración se puede representar como la variación del volumen total infiltrado por unidad de longitud del conducto a través del tiempo (Elliot, Walter y Skogerboe, 1982).

$$ql = - \frac{\partial Z}{\partial T} \quad (4.1)$$

Aquí  $Z$  puede ser evaluada con auxilio de alguna expresión diferencial basada en la ecuación de conservación de masa, aplicada a un volumen diferencial de suelo, o por una relación empírica como la ecuación de Kostiaikov-Lewis (Walter y Skogerboe, 1987). En el presente trabajo se adopta esta última, cuya expresión es:

$$Z = k \tau_o^a + f_o \tau_o$$

Reemplazando (4.1) en (3.94) se obtiene:

$$\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial A}{\partial t} = - \frac{\partial Z}{\partial t} \quad (4.2)$$

Utilizando los procedimientos descritos en el subcapítulo 3.8 se obtienen las siguientes ecuaciones transformadas para malla adaptativa, que sustituyen a la ecuación transformada para malla adaptativa (3.95) y (4.2):

**Conservación de masa**

$$\frac{\partial A}{\partial \tau} + v \frac{\partial A}{\partial \xi} + \frac{1}{sf - sr} \frac{\partial Q}{\partial \xi} = - \left[ \frac{\partial Z}{\partial \tau} + v \frac{\partial Z}{\partial \xi} \right] \quad (4.3)$$

**Conservación de la cantidad de movimiento**

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau} + \left( v + \frac{2u}{sf - sr} \right) \frac{\partial Q}{\partial \xi} + \frac{c^2 - u^2}{sf - sr} \frac{\partial A}{\partial \xi} = g A (s_o - s_f) \quad (4.4)$$

Con el fin de tener una presentación más compacta, las relaciones (4.3) y (4.4) pueden ser expresadas también en la forma:

**Conservación de masa**

$$\frac{\partial A}{\partial \tau} + v \frac{\partial A}{\partial \xi} + \gamma \frac{\partial Q}{\partial \xi} = - \frac{\partial Z}{\partial \tau} - v \frac{\partial Z}{\partial \xi} \quad (4.5)$$

**Conservación de la cantidad de movimiento**

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau} + \varphi \frac{\partial Q}{\partial \xi} + \mathcal{G} \frac{\partial A}{\partial \xi} = g A (s_o - s_f) \quad (4.6)$$

donde para las ecuaciones (4.5) y (4.6) se tiene

$$v = - \frac{\xi}{sf - sr} \frac{dsf}{dt} + \frac{(\xi - 1)}{sf - sr} \frac{dsr}{dt}$$

$$\gamma = \frac{1}{sf - sr}$$

$$\varphi = v + \gamma 2 u$$

$$\mathcal{G} = \gamma (c^2 - u^2)$$

$$u = Q / A$$

$$c = (g A / B)^{1/2}$$

Si se adopta la ecuación de Manning para evaluar la pendiente de fricción  $s_f$ , al sustituir dicha expresión en (4.6) y despejar  $Q$  se obtiene:

$$Q = \left( g s_o A - \frac{\partial Q}{\partial \tau} - \varphi \frac{\partial Q}{\partial \xi} - \mathcal{G} \frac{\partial A}{\partial \xi} \right)^{1/2} \frac{A^{7/6}}{n g^{1/2} P^{2/3}} \quad (4.7)$$

Se sugiere adoptar las ecuaciones (4.5) y (4.7) al simular un flujo superficial que crece y decrece en el espacio y en el tiempo dentro de un canal, como el que ocurre durante el riego intermitente en surcos, o el que se presenta por efecto de una avenida en un cauce natural inicialmente seco.

## 4.2 Modelo simplificado

Si bien la representación del flujo superficial mediante modelos simplificados y empíricos no es muy recomendable, existe una serie de iniciativas para obtener una primera aproximación del mismo. De esta manera, el avance de un frente de onda como el que ocurre durante una avenida en un cauce seco o durante la primera fase del riego por gravedad, puede ser simulado con modelos basados en versiones simplificadas de las ecuaciones de Saint-Venant. Entre estas alternativas se encuentran los modelos de onda cinemática (modelos de flujo uniforme) que incluso pueden ser utilizados para la simulación del riego intermitente (Walter, 1983). Dichos modelos se basan en las siguientes ecuaciones.

### Conservación de masa

$$\frac{\partial Q}{\partial S} + \frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{\partial Z}{\partial t} \quad (4.8)$$

### Conservación de cantidad de movimiento

$$s_o = s_f \quad (4.9)$$

Si a estas ecuaciones se les aplica el criterio de malla adaptativa, se obtiene:

### Conservación de masa

$$\frac{\partial A}{\partial \tau} + v \frac{\partial A}{\partial \xi} + \gamma \frac{\partial Q}{\partial \xi} = -\frac{\partial Z}{\partial \tau} - v \frac{\partial Z}{\partial \xi} \quad (4.10)$$

## Conservación de cantidad de movimiento

$$s_o = s_f \quad (4.11)$$

Siguiendo un procedimiento semejante al empleado para obtener la relación (4.7), resulta:

$$Q = (g s_o A)^{1/2} \frac{A^{7/6}}{n g^{1/2} P^{2/3}} \quad (4.12)$$

Las expresiones (4.10) y (4.12) constituyen las ecuaciones de un modelo de onda cinemática.

### 4.3 Velocidad del frente de avance

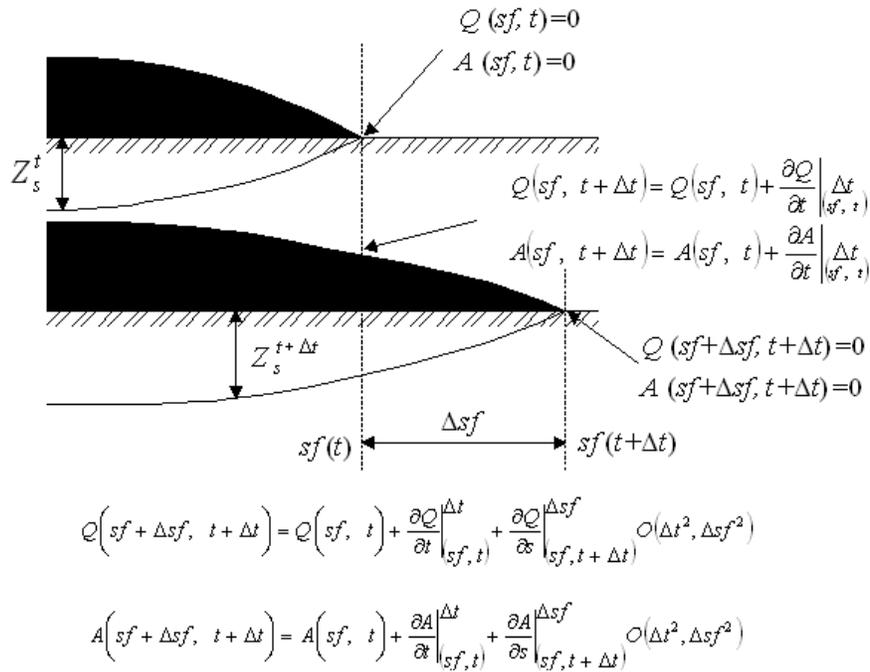
Una de las características más importantes que debe ser tomada en cuenta durante la simulación del proceso del crecimiento de una región de flujo ocasionado, por ejemplo, por una avenida sobre un cauce, es la velocidad con que la frontera derecha de la región de flujo se desplaza. La representación físico-matemática de este proceso se puede obtener a través de un balance de volumen, tal y como se muestra a continuación.

#### 4.3.1 Relación espacial y temporal entre variables

Para realizar el análisis de conservación de masa en el frente de onda se debe tener sumo cuidado ya que  $A$ ,  $Q$  y  $Z$  no son regulares en  $s = sf(t)$  debido a que algunas de sus derivadas respecto al espacio y al tiempo son discontinuas en  $s = sf$  y  $s = sf + \Delta sf$  (**Figura 4.1**). Por lo anterior, no pueden realizarse arbitrariamente expansiones en serie de Taylor alrededor de  $s = sf$  y  $s = sf + \Delta sf$  en el espacio y el tiempo. Ante esta condición en el proceso de deducción que se desarrolla a continuación se ha procurado evitar dichas discontinuidades (García, 1994). Por desarrollo en series de Taylor, de acuerdo con la **Figura 4.1**, se cumplen las relaciones siguientes:

$$Q(sf, t + \Delta t) = Q(sf, t) + \left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{(sf, t)} \Delta t + O(\Delta t^2) + \dots \quad (4.13)$$

$$Q(sf + \Delta sf, t + \Delta t) = Q(sf, t + \Delta t) + \left. \frac{\partial Q}{\partial s} \right|_{(sf, t + \Delta t)} \Delta sf + O(\Delta sf^2) + \dots \quad (4.14)$$



**Figura 4.1** Velocidad de desplazamiento del frente de avance

Reemplazando (4.13) en (4.14) resulta

$$Q(sf + \Delta sf, t + \Delta t) = Q(sf, t) + \frac{\partial Q}{\partial t} \Big|_{(sf, t)} \Delta t + \frac{\partial Q}{\partial s} \Big|_{(sf, t + \Delta t)} \Delta sf + O(\Delta t^2, \Delta sf^2) + \dots \quad (4.15)$$

Por un procedimiento semejante, se obtiene

$$A(sf + \Delta sf, t + \Delta t) = A(sf, t) + \frac{\partial A}{\partial t} \Big|_{(sf, t)} \Delta t + \frac{\partial A}{\partial s} \Big|_{(sf, t + \Delta t)} \Delta sf + O(\Delta t^2, \Delta sf^2) + \dots \quad (4.16)$$

Tomando en cuenta que:

$$Q(sf + \Delta sf, t + \Delta t) = 0 \quad (4.17)$$

$$Q(sf, t) = 0 \quad (4.18)$$

$$A(sf + \Delta sf, t + \Delta t) = 0 \quad (4.19)$$

$$A(sf, t) = 0 \quad (4.20)$$

Al reemplazar  $A(sf, t) = 0$  conjuntamente con (4.17), (4.18) y (4.19) en (4.15) y (4.16) y despreciar términos de orden  $O(\Delta t^2, \Delta sf^2)$  y superiores, resulta:

$$\frac{\Delta t}{\Delta sf} \frac{\partial Q}{\partial s} \Big|_{(sf, t)} = - \frac{\partial Q}{\partial s} \Big|_{(sf, t+\Delta t)} \quad (4.21)$$

$$\frac{\Delta t}{\Delta sf} \frac{\partial A}{\partial t} \Big|_{(sf, t)} = - \frac{\partial A}{\partial s} \Big|_{(sf, t+\Delta t)} \quad (4.22)$$

### 4.3.2 Evaluación del volumen almacenado en el frente de onda

El volumen  $V(t + \Delta t)$ , **Figura 4.1**, se puede evaluar a través de la siguiente función integral:

$$V(t + \Delta t) = \int_{sf}^{sf+\Delta sf} A(s, t + \Delta t) ds = \int_{sf}^{sf+\Delta sf} \left[ A(sf, t) + \frac{\partial A}{\partial t} \Big|_{(sf, t)} \Delta t + \frac{\partial A}{\partial s} \Big|_{(sf, t+\Delta t)} (s - sf) + O(\Delta t^2, (s - sf)^2 + \dots) \right] ds$$

Al integrar tomando en cuenta que  $A(sf, t) = 0$  y despreciando términos de orden  $O(\Delta t^2 \Delta sf, \Delta sf^3)$  y superiores, resulta

$$V(t + \Delta t) = \Delta t \Delta sf \frac{\partial A}{\partial t} \Big|_{(sf, t)} + \frac{\Delta sf^2}{2} \frac{\partial A}{\partial s} \Big|_{(sf, t+\Delta t)} \quad (4.23)$$

Este mismo volumen también puede ser evaluado de la manera siguiente:

$$V(t + \Delta t) = \int_t^{t+\Delta t} Q(sf, t) dt - \int_{sf}^{sf+\Delta sf} Z(s, t + \Delta t) ds$$

Que al recurrir a expansiones en serie de Taylor se puede expresar en la forma

$$V(t + \Delta t) = \int_t^{t+\Delta t} \left[ Q(sf, t) + \frac{\partial Q}{\partial t} \Big|_{(sf, t)} (t - t) + O(t - t)^2 \dots \right] dt - \int_{sf}^{sf+\Delta sf} \left[ Z(sf, t) + \frac{\partial Z}{\partial t} \Big|_{(sf, t)} \Delta t + \frac{\partial Z}{\partial s} \Big|_{(sf, t+\Delta t)} (s - sf) + O(\Delta t^2, (s - sf)^2) + \dots \right] ds$$

Al integrar tomando en cuenta que  $Q(sf, t) = 0$ ,  $Z(sf, t) = 0$  y despreciar términos de orden  $O(\Delta t^3, \Delta sf^3, \Delta t \Delta sf^2)$  y superiores, resulta:

$$V(t + \Delta t) = \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial Q}{\partial t} \Big|_{(sf, t)} - \Delta t \Delta sf \frac{\partial Z}{\partial t} \Big|_{(sf, t)} - \frac{\Delta sf^2}{2} \frac{\partial Z}{\partial s} \Big|_{(sf, t + \Delta t)} \quad (4.24)$$

### 4.3.3 Velocidad del frente de onda

Por conservación de masa los volúmenes expresados a través de las ecuaciones (4.23) y (4.24) deben ser iguales, de aquí que se cumpla la siguiente relación:

$$\Delta t \Delta sf \frac{\partial A}{\partial t} \Big|_{(sf, t)} + \frac{\Delta sf^2}{2} \frac{\partial A}{\partial s} \Big|_{(sf, t + \Delta t)} = \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial Q}{\partial t} \Big|_{(sf, t)} - \Delta t \Delta sf \frac{\partial Z}{\partial t} \Big|_{(sf, t)} - \frac{\Delta sf^2}{2} \frac{\partial Z}{\partial s} \Big|_{(sf, t + \Delta t)}$$

Dividiendo entre  $\Delta sf^2$  se obtiene

$$\frac{\Delta t}{\Delta sf} \frac{\partial A}{\partial t} \Big|_{(sf, t)} + \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial s} \Big|_{(sf, t + \Delta t)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta t}{\Delta sf} \right)^2 \frac{\partial Q}{\partial t} \Big|_{(sf, t)} - \frac{\Delta t}{\Delta sf} \frac{\partial Z}{\partial t} \Big|_{(sf, t)} - \frac{1}{2} \frac{\partial Z}{\partial s} \Big|_{(sf, t + \Delta t)} \quad (4.25)$$

Reemplazando (4.21) y (4.22) en (4.25)

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial s} \Big|_{(sf, t + \Delta t)} = -\frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta sf} \frac{\partial Q}{\partial t} \Big|_{(sf, t + \Delta t)} - \frac{\Delta t}{\Delta sf} \frac{\partial Z}{\partial t} \Big|_{(sf, t)} - \frac{1}{2} \frac{\partial Z}{\partial s} \Big|_{(sf, t + \Delta t)} \quad (4.26)$$

Si por desarrollo en serie de Taylor se cumple:

$$Z(sf + \Delta sf, t + \Delta t) = Z(sf, t) + \frac{\partial Z}{\partial t} \Big|_{(sf, t)} \Delta t + \frac{\partial Z}{\partial s} \Big|_{(sf, t + \Delta t)} \Delta sf + O(\Delta t^2) + O(\Delta sf^2) + \dots$$

y considerando que en el frente de onda el volumen infiltrado es nulo (se está haciendo referencia al volumen infiltrado respecto al volumen que ha ingresado al canal durante una avenida o, en el caso del riego intermitente, durante el ciclo en que se encuentra el riego):

$$Z(sf + \Delta sf, t + \Delta t) = Z(sf, t) = 0$$

Al despreciar términos de orden  $O(\Delta t^2, \Delta sf^2)$  y superiores, resulta

$$\frac{\Delta t}{\Delta sf} \frac{\partial Z}{\partial t} \Big|_{(sf, t)} = - \frac{\partial Z}{\partial s} \Big|_{(sf, t+\Delta t)} \quad (4.27)$$

Reemplazando (4.24) en (4.23) se obtiene

$$\frac{\Delta sf}{\Delta t} \frac{\partial A}{\partial s} \Big|_{(sf, t+\Delta t)} = \frac{\partial Q}{\partial s} \Big|_{(sf, t+\Delta t)} - \frac{\Delta sf}{\Delta t} \frac{\partial Z}{\partial s} \Big|_{(sf, t+\Delta t)} \quad (4.28)$$

En el límite, cuando  $\Delta t \rightarrow 0$

$$\frac{dsf}{dt} \frac{\partial A}{\partial s} = \frac{\partial Q}{\partial s} - \frac{dsf}{dt} \frac{\partial Z}{\partial s} \quad (4.29)$$

De aquí que la velocidad del frente de onda esté dada por la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dsf}{dt} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial s}}{\frac{\partial A}{\partial s} + \frac{\partial Z}{\partial s}} \quad (4.30)$$

Otra forma de representar la Ecuación 4.30 resulta al considerar en la Ecuación 4.27 que  $\Delta t \rightarrow 0$ , con lo cual se obtiene la siguiente relación:

$$\frac{\Delta t}{\Delta sf} \frac{\partial Z}{\partial t} = - \frac{\partial Z}{\partial s}$$

Que al ser reemplazada en (4.30) conduce a la relación siguiente

$$\frac{dsf}{dt} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial Z}{\partial t}}{\frac{\partial A}{\partial s}} \quad (4.31)$$

la cual, al considerar la Ecuación 4.1, se puede expresar en la forma

$$\frac{dsf}{dt} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial s} - ql}{\frac{\partial A}{\partial s}} \quad (4.32)$$

En términos físicomatemáticos, tanto la Ecuación 4.31 como la 4.32 son equivalentes a la 4.30, por lo que pueden ser utilizadas indistintamente. Su selección depende de la información disponible para su aplicación.

Las expresiones (4.30), (4.31) y (4.32) representan la ecuación de conservación de masa en el frente de onda y, por lo tanto, para representar adecuadamente el comportamiento de este frente, deberá tomarse en cuenta la ecuación de cantidad de movimiento ya que el avance del frente de onda depende también del cambio en la cantidad de movimiento en el mismo.

Si en la Ecuación 4.27 se hace tender  $\Delta t \rightarrow 0$  y se reemplaza la Ecuación 4.1, se obtiene

$$q = \frac{\partial Z}{\partial s} \frac{dsf}{dt}$$

Esta relación indica matemáticamente que en la frontera  $(sf, t)$ , mientras exista velocidad de desplazamiento de las fronteras y un gradiente longitudinal de infiltración, existirá infiltración en el frente de onda. Si bien este resultado es notable, no se debe perder de vista que la expresión anterior por sí sola no describe la física del fenómeno ya que es una expresión derivada de una caracterización geométrica de la posición del frente de onda para dos instantes diferentes de tiempo y no toma en cuenta las leyes fundamentales de conservación de masa y de cantidad de movimiento. Hay que considerar que, de acuerdo con la Ecuación 4.32, que toma en cuenta el principio de conservación de masa, cuando la velocidad del frente de onda es cero resulta:

$$q = \frac{\partial Q}{\partial s}$$

mientras que de la expresión bajo la cual se plantea esta discusión resulta  $q=0$ , lo cual físicamente es falso.

#### 4.4 Velocidad del desplazamiento de la retaguardia

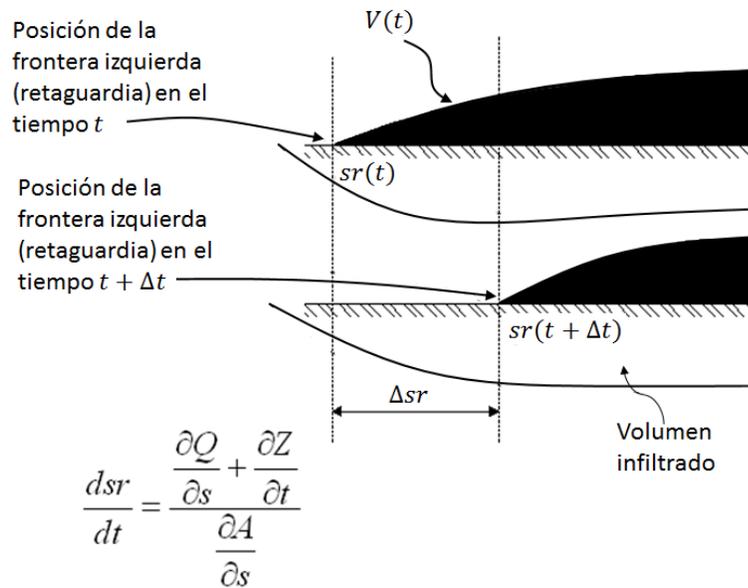
El proceso de recesión, es decir, el avance de la frontera izquierda, es tan importante como el proceso de avance de la frontera derecha. También la representación físicomatemática de este proceso se puede obtener a través de un balance de volumen.

### 4.4.1 Relación espacial y temporal entre variables

Por desarrollo en series de Taylor, de acuerdo con la **Figura 4.2** se cumplen las relaciones siguientes:

$$Q(sr + \Delta sr, t + \Delta t) = Q(sr, t) + \frac{\partial Q}{\partial t} \Big|_{(sr+\Delta sr, t)} \Delta t + \frac{\partial Q}{\partial s} \Big|_{(sr, t)} \Delta sr + O(\Delta t^2, \Delta sr^2) + \dots$$

$$A(sr + \Delta sr, t + \Delta t) = A(sr, t) + \frac{\partial A}{\partial t} \Big|_{(sr+\Delta sr, t)} \Delta t + \frac{\partial A}{\partial s} \Big|_{(sr, t)} \Delta sr + O(\Delta t^2, \Delta sr^2) + \dots$$



**Figura 4.2** Velocidad de desplazamiento del frente de recesión (frontera izquierda)

Tomando en cuenta que:

$$Q(sr + \Delta sr, t + \Delta t) = 0, \quad Q(sr, t) = 0$$

$$A(sr + \Delta sr, t + \Delta t) = 0, \quad A(sr, t) = 0$$

y despreciando términos de orden  $O(\Delta t^2, \Delta sr^2)$  y superiores, se obtiene:

$$\frac{\Delta t}{\Delta sr} \frac{\partial Q}{\partial t} \Big|_{(sr+\Delta sr, t)} = - \frac{\partial Q}{\partial s} \Big|_{(sr, t)} \tag{4.33}$$

$$\frac{\Delta t}{\Delta sr} \frac{\partial A}{\partial t} \Big|_{(sr+\Delta sr, t)} = \frac{\partial A}{\partial s} \Big|_{(sr, t)} \quad (4.34)$$

#### 4.4.2 Evaluación del volumen almacenado en el frente de retroceso

El volumen  $V(t)$ , **Figura 4.2**, se puede evaluar a través de la función integral siguiente:

$$V(t) = \int_{sr}^{sr+\Delta sr} A(s, t) ds = \int_{sr}^{sr+\Delta sr} \left[ A(sr, t) + \frac{\partial A}{\partial s} \Big|_{(sr, t)} (s - sr) + O((s - sr)^2) + \dots \right] ds$$

Al integrar tomando en cuenta que  $A(sr, t) = 0$  y despreciando términos de orden  $O(\Delta sr^3)$  y superiores, resulta

$$V(t) = \frac{\Delta sr^2}{2} \frac{\partial A}{\partial s} \Big|_{(sr, t)} \quad (4.35)$$

Este mismo volumen también puede ser evaluado como:

$$V(t) = \int_t^{t+\Delta t} Q(sr + \Delta sr, t) dt + \int_{sr}^{sr+\Delta sr} [Z(s, t + \Delta t) - Z(s, t)] ds$$

Expresión que al aplicar expansiones en serie de Taylor se puede representar en la forma siguiente

$$V(t) = \int_t^{t+\Delta t} \left[ Q(sr, t) + \frac{\partial Q}{\partial t} \Big|_{(sr+\Delta sr, t)} (t - t) + \frac{\partial Q}{\partial s} \Big|_{(sr, t)} \Delta sr + O((t - t)^2) + O(\Delta sr)^2 + \dots \right] dt \\ - \int_{sr}^{sr+\Delta sr} \left[ Z(sr, t + \Delta t) + \frac{\partial Z}{\partial s} \Big|_{(sr, t+\Delta t)} (s - sr) - Z(sr, t) - \frac{\partial Z}{\partial s} \Big|_{(sr, t)} (s - sr) + O((s - sr)^2) + \dots \right] ds$$

Al integrar tomando en cuenta que  $Q(sr, t) = 0$  y  $Z(sr, t + \Delta t) = Z(sr, t)$ , despreciar términos de orden  $O(\Delta sr^3, \Delta t^3, \Delta sr^2 \Delta t)$  y superiores, resulta:

$$V(t) = \Delta sr \Delta t \frac{\partial Q}{\partial s} \Big|_{(sr, t)} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial Q}{\partial t} \Big|_{(sr+\Delta sr, t)} + \frac{\Delta sr^2}{2} \left( \frac{\partial Z}{\partial s} \Big|_{(sr, t+\Delta t)} - \frac{\partial Z}{\partial s} \Big|_{(sr, t)} \right) \quad (4.36)$$

Si

$$Z(sr + \Delta sr, t + \Delta t) = Z(sr, t) + \frac{\partial Z}{\partial t} \Big|_{(sr+\Delta sr, t)} \Delta t + \frac{\partial Z}{\partial s} \Big|_{(sr, t)} \Delta sr + O(\Delta t^2, \Delta sr^2) + \dots \quad (4.37)$$

$$Z(sr + \Delta sr, t + \Delta t) = Z(sr, t + \Delta t) + \frac{\partial Z}{\partial s} \Big|_{(sr, t+\Delta t)} \Delta sr + O(\Delta sr^2) + \dots \quad (4.38)$$

Restando (4.38) de (4.37) y tomando en cuenta que

$$Z(sr, t + \Delta t) = Z(sr, t)$$

Al despreciar términos de orden  $O(\Delta t^2, \Delta sr^2)$  y superiores, resulta

$$\frac{\partial Z}{\partial s} \Big|_{(sr, t+\Delta t)} = \frac{\partial Z}{\partial t} \Big|_{(sr+\Delta sr, t)} \frac{\Delta t}{\Delta sr} + \frac{\partial Z}{\partial s} \Big|_{(sr, t)} \quad (4.39)$$

Si se reemplaza (4.39) en (4.36), se obtiene:

$$V(t) = \Delta sr \Delta t \frac{\partial Q}{\partial s} \Big|_{(sr, t)} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial Q}{\partial t} \Big|_{(sr+\Delta sr, t)} + \frac{\Delta t \Delta sr}{2} \frac{\partial Z}{\partial t} \Big|_{(sr+\Delta sr, t)} \quad (4.40)$$

#### 4.4.3 Velocidad del avance de la frontera izquierda

Por conservación de masa se deben satisfacer simultáneamente las ecuaciones (4.40) y (4.35). Al igualar estas expresiones y dividiendo entre  $\Delta sr^2$  la relación resultante, se obtiene:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial s} \Big|_{(sr, t)} = \frac{\Delta t}{\Delta sr} \frac{\partial Q}{\partial s} \Big|_{(sr, t)} + \frac{\Delta t^2}{2\Delta sr^2} \frac{\partial Q}{\partial t} \Big|_{(sr+\Delta sr, t)} + \frac{\Delta t}{2\Delta sr} \frac{\partial Z}{\partial t} \Big|_{(sr+\Delta sr, t)} \quad (4.41)$$

Al reemplazar (4.33) en (4.41) y simplificar, resulta

$$\frac{\Delta sr}{\Delta t} \frac{\partial A}{\partial s} \Big|_{(sr, t)} = \frac{\partial Q}{\partial s} \Big|_{(sr, t)} + \frac{\partial Z}{\partial t} \Big|_{(sr+\Delta sr, t)} \quad (4.42)$$

en el límite cuando  $\Delta sr \rightarrow 0$

$$\frac{dsr}{dt} \frac{\partial A}{\partial s} = \frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial Z}{\partial t} \quad (4.43)$$

De aquí que la velocidad con que avanza la frontera izquierda esté dada por la ecuación diferencial siguiente:

$$\frac{dsr}{dt} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial Z}{\partial t}}{\frac{\partial A}{\partial s}} \quad (4.44)$$

Otra forma de presentar esta velocidad se obtiene al reemplazar la expresión (4.1) en (4.44), con lo que resulta

$$\frac{dsr}{dt} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial s} - ql}{\frac{\partial A}{\partial s}} \quad (4.45)$$

La Ecuación 4.45 es fisicomatemáticamente equivalente a la (4.44) y por lo tanto ambas pueden ser utilizadas de manera indistinta, de aquí que su selección dependa de los datos disponibles para su aplicación. El segundo miembro de la Ecuación 4.45 es algebraicamente igual al segundo miembro de la Ecuación 4.32 y la misma similitud ocurre entre la (4.44) y la (4.31). Sin embargo, no es factible encontrar una similitud semejante con respecto al segundo miembro de la (4.30) debido a que las relaciones espaciales y temporales entre la infiltración en el frente de onda y el frente de la retaguardia son diferentes, tal y como se puede apreciar al comparar la expresión (4.27) con la (4.39).



**Referencias**

**5**



---

## Capítulo 5

### Referencias

- Abbott, M. B. (1975) Method of characteristics. Mahmood, K. y Yevjevich, V. (eds.). *Unsteady flow in open channels*. Fort Collins, CO: Water Resources Publications.
- Abbot, M. B. (1980) *Computational hydraulics: Elements of the Theory of Free Surface Flows*. London: Pitman Publishers.
- Aidarov, I. P., Golavanov, A. I., Mamaev, M. G. (1985) *El riego*. Moscú: Editorial Mir.
- Aldama-Rodríguez, A. y Martínez-Austria, P. (1988) Esquema malla adaptiva para flujo transitorio en canales con frontera móvil. *X Congreso Nacional de Hidráulica*. Octubre, México. pp. 251-271.
- Aparicio, F. J. y Berezowsky, M. (1989) Las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento en la hidráulica. *Ingeniería Hidráulica en México*, 4(2), pp. 40-45.
- Aparicio, F. J. (1988) *Notas de hidráulica computacional*. Reporte interno. División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la UNAM.
- Aparicio, F. J. (1985) *Simulación numérica del flujo supercrítico transitorio*. Tesis doctoral. México: Universidad Nacional Autónoma de México.
- Barré de Saint Venant, A.J.C. (1871) Théorie du mouvement non-permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 73. Paris.
- Chow, V. T. (1982) *Hidráulica de los canales abiertos*. México: Diana.
- Daily, J. W. y Harleman, D. R. F. (1981) *Dinámica de los fluidos*. México: Trillas.
- Elliott, R. L., Walker, W. R. y Skogerboe, G. V. (1982) Zero-Inertia Modeling of Furrow Irrigation Advance. *Journal of the Irrigation and Drainage Division*, 108(3), pp. 179-195.
- Escudero, C. A., Valencia, E. A. y Poveda, Y. A. (2013) *Centros de curvatura y circunferencia osculatriz de curvas en  $s^2$* . Pereira: Departamento de Matemáticas, Universidad Tecnológica de Pereira.
- García, N. H. (1989) Sobre la ecuación de flujo espacialmente variado. *XIV Congreso de la Academia Nacional de Ingeniería*. México.
- García, N. H. (1989) *Ecuaciones fundamentales para flujo unidimensional a superficie libre*. México: Instituto Mexicano de Tecnología del Agua.
- García, N. H. (1994) *Simulación numérica de flujo intermitente para diseño de riego por gravedad*. Tesis doctoral. México: Universidad Nacional Autónoma de México.
- Irodov, I. E. (1981) *Leyes fundamentales de mecánica*. Moscú: Editorial Mir, Moscu.

- 
- Jiménez, A. A. y Berezowsky, M. (2004) *Modelación de flujo bidimensional horizontal con coordenadas curvilíneas generales*. Serie investigación y desarrollo. Instituto de Ingeniería: Universidad Nacional Autónoma de México.
- Liggett, J. A. y Cunge, J.A. (1975) Numerical methods of solution of the unsteady flow equations. Mahmood, K. y Yevjevich, V. (eds.). *Unsteady flow in Open Channels*. Fort Collins, CO: Water Resources Publications.
- Mahmood, K. y Yevjevich, V. (eds). (1975) *Unsteady Flow in Open Channels*. Fort Collins, CO: Water Resources Publications.
- Rodríguez, R. P. (2008) *Hidráulica II. Hidráulica de canales*. México: Instituto Politécnico Nacional.
- Sámano, D. A. y Sen, M. (2009) *Mecánica de fluidos*. Notre Dame: Universidad de Notre Dame.
- Singh, V. P. y He, Y.C. (1988) Muskingum Model for Furrow Irrigation. *Journal of the Irrigation and Drainage*, 114(1), pp. 89-103.
- Sotelo, G. (1974) *Hidráulica general. Vol. 1*. México: Limusa.
- Sotelo, G. (2009) *Hidráulica de canales*. Facultad de Ingeniería: Universidad Nacional Autónoma de México.
- Streeter, V. L. y Wylie, B. (1979) *Mecánica de los fluidos*. México: McGraw-Hill.
- Strelkoff, T. y Katopodes, N. D. (1977) Border-Irrigation Hydraulics with Zero Inertia. *Journal of the Irrigation and Drainage Division*, 103(3), pp. 325-342.
- Villón, B. M. (2007) *Hidráulica de canales*. Lima: Editorial Villón.
- Walker, W. R. y Skogerboe, G. V. (1987) *Surface Irrigation: Theory and Practice*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall Inc.





[www.gob.mx/imta](http://www.gob.mx/imta)