

# SOLUCIÓN EN DIFERENCIAS FINITAS DE LA ECUACIÓN DE BOUSSINESQ CON POROSIDAD DRENABLE VARIABLE Y CONDICIÓN DE RADIACIÓN FRACTAL EN LA FRONTERA

## FINITE DIFFERENCE SOLUTION OF THE BOUSSINESQ EQUATION WITH VARIABLE DRAINABLE POROSITY AND FRACTAL RADIATION BOUNDARY CONDITION

Carlos Chávez<sup>1\*</sup>, Carlos Fuentes<sup>1</sup>, Manuel Zavala<sup>2</sup>, Felipe Zataráin<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Querétaro. 76010. Cerro de las Campanas, Santiago de Querétaro, Querétaro, México. (chagcarlos@gmail.com) (cbfuentesr@gmail.com).

<sup>2</sup>Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Zacatecas. 98000. Jardín Juárez Núm. 147, Centro Histórico. Zacatecas, México. (mzavala73@yahoo.com.mx). <sup>3</sup>Coordinación de Riego y Drenaje, Instituto Mexicano de Tecnología del Agua. 62550. Paseo Cuauhnáhuac Núm. 8532. Jiutepec. Morelos, México. (fzata@tlaloc.imta.mx).

### RESUMEN

El drenaje subterráneo es utilizado para eliminar excedentes de agua en la zona radical y suelos salinos para lixiviar las sales. La dinámica del agua es estudiada con la ecuación de Boussinesq, sus soluciones analíticas son obtenidas asumiendo que la transmisibilidad del acuífero y la porosidad drenable son constantes y que la superficie libre se abate de manera instantánea sobre los drenes. La solución en el caso general requiere de soluciones numéricas. Se ha mostrado que la condición de frontera en los drenes es una condición de radiación fractal y la porosidad drenable es variable y relacionada con la curva de retención de humedad, y ha sido resuelta con el método del elemento finito, que en un esquema unidimensional puede hacerse equivalente al método de diferencias finitas. Aquí se propone una solución en diferencias finitas de la ecuación diferencial considerando la porosidad drenable variable y la condición de radiación fractal. El esquema en diferencias finitas propuesto ha resultado en dos formulaciones: en una aparecen de manera explícita la carga y la porosidad drenable, variables ligadas con una relación funcional, que se ha denominado esquema mixto; en la otra aparece sólo la carga hidráulica, denominada esquema en carga. Los dos esquemas coinciden cuando la porosidad drenable es independiente de la carga. Los esquemas han sido validados con una solución analítica lineal, y para la no linealidad se ha mostrado que la convergencia numérica es estable y concisa. La solución numérica es útil para la caracterización hidrodinámica del suelo a través de una modelación inversa, y para un mejor diseño de los sistemas de drenaje agrícola

### ABSTRACT

The underground drainage is used to remove excess water in the root zone and in saline soils to leach salts. The dynamics of water is studied with the Boussinesq equation; its analytical solutions are obtained assuming that the aquifer transmissivity and drainable porosity are constants and that the free surface instantly lowers on the drains. The solution in the general case requires numerical solution. It has been shown that the boundary condition in the drains is a fractal radiation condition and the drainable porosity is a variable and is related to the moisture retention curve, and has been solved with the finite-element method, which in one-dimensional scheme can become equivalent to the finite-difference method. It is proposed here a finite difference solution of the differential equation considering the variable drainable porosity and fractal radiation condition. The proposed finite difference scheme has resulted in two formulations: in one the head and drainable porosity explicitly appear, variables linked to a functional relationship, which has been called mixed scheme; in the other only the hydraulic head appears, called head scheme. The two schemes coincide when the drainable porosity is independent of the head. The schemes have been validated with a linear analytical solution; for the nonlinearity has been shown that the numerical convergence is stable and concise. The numerical solutions is useful for the hydrodynamic characterization of the soil through an inverse modeling, and for a better design of the agricultural underground drainage systems as the assumptions used in the classical solutions have been eliminated.

\*Autor responsable ❖ Author for correspondence.

Recibido: mayo, 2010. Aprobado: septiembre, 2011.

Publicado como ARTÍCULO en *Agrociencia* 45: 911-927. 2011.

**Key words:** mixed formulation, head formulation, retention curve, inverse modeling.

subterráneo ya que las hipótesis consideradas en las soluciones clásicas han sido eliminadas.

**Palabras clave:** formulación mixta, formulación en carga, curva de retención, modelación inversa.

## INTRODUCCIÓN

La dinámica del agua en los sistemas de drenaje ha sido estudiada con la ecuación de Boussinesq de los acuíferos libres. En su forma unidimensional, es una de las bases para construir soluciones analíticas aproximadas de la dinámica del agua en un sistema de drenaje en régimen permanente o transitorio (Hooghoudt, 1940; Dumm, 1954). Estas soluciones no representan adecuadamente las condiciones reales, ya que han sido construidas bajo supuestos como: porosidad drenable y transmisibilidad del acuífero son constantes y que la superficie libre se abate de manera instantánea sobre los drenes. Sin embargo, considerando condiciones más representativas conduce a dificultades analíticas, razón por la cual la utilización de métodos numéricos es necesaria para construir soluciones de la ecuación de Boussinesq.

En una línea de investigación Zavala *et al.* (2004, 2007), basados en los conceptos de la geometría fractal y en experiencias de drenaje, recomiendan una condición de radiación fractal, la cual incluye la radiación lineal utilizada por Fuentes *et al.* (1997). En cuanto a la porosidad drenable, Fuentes *et al.* (2009), basados en los conceptos de lámina drenable y lámina drenada así como en experiencias de drenaje, proponen una expresión analítica en la cual interviene la curva de retención de humedad de los suelos.

Existe un esquema en diferencias finitas, basado en el esquema de Laasonen, propuesto por Zataráin *et al.* (1998) para resolver numéricamente la ecuación de Richards aplicada al fenómeno de la infiltración del agua en los suelos, con excelentes resultados. Aparte de su alta precisión, estabilidad y convergencia, el esquema tiene la ventaja adicional de su naturaleza intuitiva ya que está basado en un balance local de masa. Este esquema puede ser utilizado para resolver la ecuación unidimensional de Boussinesq del drenaje agrícola. De esta manera, el presente trabajo tiene como objetivo resolver la ecuación unidimensional de Boussinesq con el método de diferencias finitas, considerando que la porosidad drenable es

## INTRODUCTION

The dynamics of water in the drainage systems has been studied with the Boussinesq equation for unconfined aquifers. In its one-dimensional form, it is one of the bases for building approximate analytical solutions of the dynamics of water in a drainage system in steady or transient regime (Hooghoudt, 1940; Dumm, 1954). These solutions do not adequately represent the actual conditions, as they have been constructed under assumptions as: drainable porosity and aquifer transmissivity are constant and that the free surface is instantly lowered over the drains. However, considering conditions more representative leads to analytical difficulties, which is why the use of numerical methods is necessary to construct solutions of the Boussinesq equation.

In a research Zavala *et al.* (2004, 2007), based on the concepts of fractal geometry and on drainage experience, recommend a fractal radiation condition, which includes linear radiation used by Fuentes *et al.* (1997). As to the drainable porosity, Fuentes *et al.* (2009), based on the concepts of drainable and drained depth as well as drainage experience, propose an analytical expression in which the retention curve of soil moisture is involved.

There is a finite difference scheme, based on the Laasonen scheme, proposed by Zataráin *et al.* (1998) to solve numerically the Richards equation applied to the infiltration phenomenon of water in soils, with excellent results. Apart from its high accuracy, stability and convergence, the scheme has the additional advantage of its intuitive nature as it is based on local mass balance. This scheme can be used to solve the one-dimensional Boussinesq equation of the agricultural drainage. Thus, this study aims to solve one-dimensional Boussinesq equation with the finite-difference method, considering that the drainable porosity is variable and that boundary conditions in the drains are of fractal radiation.

## Boussinesq equation

In the study of the dynamics of water in drainage systems with the Boussinesq equation, it is generally assumed that variations in the hydraulic head

variable y que las condiciones de frontera en los drenes son de radiación fractal.

**Ecuación de Boussinesq**

En el estudio de la dinámica del agua en sistemas de drenaje con la ecuación de Boussinesq, se asume generalmente que las variaciones de la carga hidráulica a lo largo de los tubos de drenaje (dirección  $y$ ) son despreciables con respecto a las variaciones de la carga en un corte transversal (dirección  $x$ ). Así, la ecuación a resolver en el dominio mostrado en la Figura 1 se reduce a una dimensión, que resulta de la ecuación de continuidad ( $\partial(vH)/\partial t + \partial(Hq)/\partial x = R_w$ ) y de la ley de Darcy ( $q = -K_s \partial H/\partial x$ ):

$$\mu(H) \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ T(H) \frac{\partial H}{\partial x} \right] + R_w \quad (1)$$

donde,  $H = H(x,t)$  es la carga hidráulica contada a partir de un estrato impermeable, y es una función de la coordenada horizontal ( $x$ ) y del tiempo ( $t$ );  $q$  es el flujo de Darcy o caudal por unidad de área;  $K_s$  es la conductividad hidráulica a saturación;  $v = v(H)$  es la porosidad drenable como una función de la carga;  $R_w$  es el volumen de recarga en la unidad de tiempo por unidad de área del acuífero. El caudal unitario de agua  $Q_u = Hq$  es proporcionado por:

$$Q_u = -T(H) \frac{\partial H}{\partial x}; \quad T(H) = K_s H \quad (2)$$

donde  $T(H)$  es la transmisibilidad.

La capacidad de almacenamiento está definida por:

$$\mu(H) = \frac{dW}{dH} = v(H) + H \frac{dv}{dH} \quad (3)$$

donde  $W = vH$  es la lámina de agua drenable. La igualdad  $\mu = v$  se da cuando la porosidad drenable es independiente de la carga.

Una expresión de la capacidad de almacenamiento es dada por Fuentes *et al.* (2009):

along the drain pipes ( $y$  direction) are negligible with respect to head variations in a cross-section ( $x$  direction). Thus, the equation to be solved in the domain shown in Figure 1 is reduced to one dimension, resulting from the equation of continuity ( $\partial(vH)/\partial t + \partial(Hq)/\partial x = R_w$ ) and Darcy's law ( $q = -K_s \partial H/\partial x$ ):

$$\mu(H) \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ T(H) \frac{\partial H}{\partial x} \right] + R_w \quad (1)$$

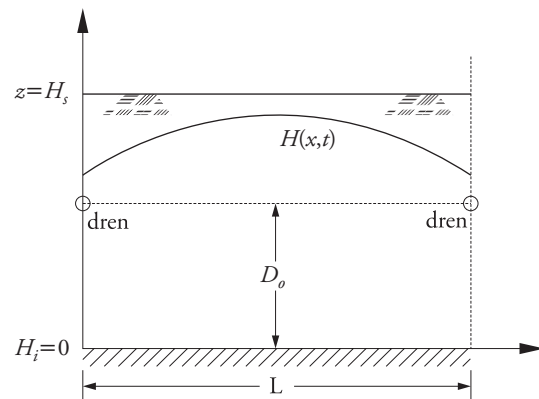
where,  $H = H(x,t)$  is the hydraulic head counted from an impervious layer, and is a function of the horizontal coordinate ( $x$ ) and time ( $t$ );  $q$  is the Darcy flux or flow per unit of area;  $K_s$  is the saturated hydraulic conductivity;  $v = v(H)$  is the drainable porosity as a head function;  $R_w$  is the volume of recharge in the unit of time per unit of area of the aquifer. The unitary flow of water  $Q_u = Hq$  is provided by:

$$Q_u = -T(H) \frac{\partial H}{\partial x}; \quad T(H) = K_s H \quad (2)$$

where  $T(H)$  is transmissivity.

The storage capacity is defined by:

$$\mu(H) = \frac{dW}{dH} = v(H) + H \frac{dv}{dH} \quad (3)$$



**Figura 1. Esquema de un sistema de drenaje agrícola subterráneo.**

**Figure 1. Scheme of an agricultural underground drainage system.**

$$\mu(H) = \theta_s - \theta(H - H_s) \quad (4)$$

donde  $\theta_s$  es el contenido de humedad a saturación; y  $\theta(H - H_s)$  representa la evolución del contenido de humedad en la posición  $z = H_s$  mientras la superficie libre desciende.

La porosidad drenable se deduce a partir de la igualdad de las ecuaciones (3) y (4):

$$v(H) = \frac{1}{H} \int_0^H \mu(\bar{H}) d\bar{H} = \frac{1}{H} \int_0^H [\theta_s - \theta(\bar{H} - H_s)] d\bar{H} \quad (5)$$

donde  $\bar{H}$  es la variable de integración.

### La porosidad drenable

Para calcular la capacidad de almacenamiento y la porosidad drenable es necesario proporcionar la curva de retención de humedad del suelo. En la literatura es bastante común representarla con la ecuación de van Genuchten (1980):  $\theta(\psi) = \theta_r + (\theta_s - \theta_r) \left[ 1 + (\psi/\psi_d)^n \right]^{-m}$ , donde  $\theta_r$  es el contenido residual de humedad,  $\psi_d$  es un parámetro de escala de la presión,  $m$  y  $n$  son dos parámetros de forma positivos. Introduciendo esta ecuación en las ecuaciones (4) y (5) proporciona la capacidad de almacenamiento y la porosidad drenable siguientes:

$$\mu(H) = (\theta_s - \theta_r) \left\{ 1 - \left[ 1 + \left( \frac{H_s - H}{|\psi_d|} \right)^n \right]^{-m} \right\} \quad (6)$$

$$v(H) = (\theta_s - \theta_r) \left[ 1 - \frac{|\psi_d|}{H} \int_{(H_s-H)/|\psi_d|}^{H_s/|\psi_d|} (1 + \psi_*^n)^{-m} d\psi_* \right] \quad (7)$$

La porosidad drenable no tiene una forma analítica cerrada, pudiendo ser calculada mediante integración numérica. Una forma cerrada puede ser construida a partir de la difusividad de Fujita (1952) y de la relación conductividad hidráulica-difusividad

where  $W = vH$  is the drainable depth. The equality  $\mu = v$  occurs when the drainable porosity is independent of the head.

An expression of the storage capacity is given by Fuentes *et al.* (2009):

$$\mu(H) = \theta_s - \theta(H - H_s) \quad (4)$$

where  $\theta_s$  is the saturated volumetric water content and  $\theta(H - H_s)$  represents the water content evolution in position  $z = H_s$  while the free surface decreases.

The drainable porosity is deduced from the equality of equations (3) and (4):

$$v(H) = \frac{1}{H} \int_0^H \mu(\bar{H}) d\bar{H} = \frac{1}{H} \int_0^H [\theta_s - \theta(\bar{H} - H_s)] d\bar{H} \quad (5)$$

where  $\bar{H}$  is the variable of integration.

### The drainable porosity

To calculate the storage capacity and drainable porosity it is necessary to provide the soil moisture retention curve. In literature, it is quite common to represent it with the equation of van Genuchten (1980):  $\theta(\psi) = \theta_r + (\theta_s - \theta_r) \left[ 1 + (\psi/\psi_d)^n \right]^{-m}$ , where  $\theta_r$  is the residual volumetric water content,  $\psi_d$  is the pressure scale parameter,  $m$  and  $n$  are positive form parameters. Introducing this equation in the equations (4) and (5) provides the following storage capacity and the drainable porosity:

$$\mu(H) = (\theta_s - \theta_r) \left\{ 1 - \left[ 1 + \left( \frac{H_s - H}{|\psi_d|} \right)^n \right]^{-m} \right\} \quad (6)$$

$$v(H) = (\theta_s - \theta_r) \left[ 1 - \frac{|\psi_d|}{H} \int_{(H_s-H)/|\psi_d|}^{H_s/|\psi_d|} (1 + \psi_*^n)^{-m} d\psi_* \right] \quad (7)$$

The drainable porosity does not have a closed analytical form and can be calculated by numerical

hidráulica de Parlange *et al.* (1982) (Fuentes *et al.*, 1992), definidas por:

$$D(\Theta) = \left( \frac{K_s \lambda_c}{\theta_s - \theta_r} \right) \frac{1 - \alpha}{(1 - \alpha \Theta)^2} \quad (8)$$

$$K(\Theta) = K_s \frac{\Theta [1 - \beta + (\beta - \alpha) \Theta]}{1 - \alpha \Theta} \quad (9)$$

donde  $\Theta = (\theta - \theta_r) / (\theta_s - \theta_r)$  es un grado efectivo de saturación;  $\alpha$  y  $\beta$  son parámetros de forma adimensionales tales que  $0 < \alpha < 1$  y  $0 < \beta < 1$ ;  $\lambda_c$  es la escala de Bouwer (1964). De la definición de la difusividad hidráulica  $D(\theta) = K(\theta) d\psi / d\theta$ , considerando la condición  $\theta = \theta_s$  cuando  $\psi = 0$ , se deduce:

$$\psi(\Theta) = \psi_c \left\{ \frac{\alpha}{\beta} \ln \left[ \frac{1 - \alpha \Theta}{(1 - \alpha) \Theta} \right] + \frac{\beta - \alpha}{\beta(1 - \beta)} \ln \left[ \frac{1 - \beta + (\beta - \alpha) \Theta}{(1 - \alpha) \Theta} \right] \right\} \quad (10)$$

donde  $\psi_c = -\lambda_c$ .

La porosidad drenable se obtiene de las ecuaciones (5) y (10):

$$v(H) = (\theta_s - \theta_r) \left\{ 1 - \frac{\lambda_c}{\beta H} \ln \left[ \frac{1 - \beta + (\beta - \alpha) \Theta}{1 - \alpha \Theta} \right] \right\}_{\Theta(-H_s)}^{\Theta(H-H_s)} \quad (11)$$

Se debe notar que la función  $\theta(\psi)$  es implícita en la ecuación (10), y en consecuencia la función  $v(H)$ . Estas funciones pueden ser explicitadas en función de la presión si se acepta  $\alpha = \beta$ ; en este caso la conductividad en función de la presión corresponde a la ecuación de Gardner (1958)  $K(\psi) = K_s \exp(\psi / \lambda_c)$  ampliamente utilizada en estudios teóricos. La curva  $\theta(\psi)$  correspondiente es la siguiente:

integration. A closed form can be constructed from the diffusivity function of Fujita (1952) and the hydraulic conductivity-hydraulic diffusivity ratio of Parlange *et al.* (1982) (Fuentes *et al.*, 1992), defined by:

$$D(\Theta) = \left( \frac{K_s \lambda_c}{\theta_s - \theta_r} \right) \frac{1 - \alpha}{(1 - \alpha \Theta)^2} \quad (8)$$

$$K(\Theta) = K_s \frac{\Theta [1 - \beta + (\beta - \alpha) \Theta]}{1 - \alpha \Theta} \quad (9)$$

where  $\Theta = (\theta - \theta_r) / (\theta_s - \theta_r)$  is an effective degree of saturation;  $\alpha$  and  $\beta$  are parameters of dimensionless forms such that  $0 < \alpha < 1$  and  $0 < \beta < 1$ ;  $\lambda_c$  is the Bouwer scale (1964). Of the definition of the hydraulic diffusivity  $D(\theta) = K(\theta) d\psi / d\theta$ , considering the condition  $\theta = \theta_s$  when  $\psi = 0$ , it is deduced:

$$\psi(\Theta) = \psi_c \left\{ \frac{\alpha}{\beta} \ln \left[ \frac{1 - \alpha \Theta}{(1 - \alpha) \Theta} \right] + \frac{\beta - \alpha}{\beta(1 - \beta)} \ln \left[ \frac{1 - \beta + (\beta - \alpha) \Theta}{(1 - \alpha) \Theta} \right] \right\} \quad (10)$$

where  $\psi_c = -\lambda_c$ .

Drainable porosity is obtained of equations (5) and (10):

$$v(H) = (\theta_s - \theta_r) \left\{ 1 - \frac{\lambda_c}{\beta H} \ln \left[ \frac{1 - \beta + (\beta - \alpha) \Theta}{1 - \alpha \Theta} \right] \right\}_{\Theta(-H_s)}^{\Theta(H-H_s)} \quad (11)$$

It should be noted that the function  $\theta(\psi)$  is implicit in equation (10), and consequently the function  $v(H)$ . These functions can be explicit in terms of the pressure if  $\alpha = \beta$ ; is accepted in this case the conductivity as a function of pressure corresponds to the Gardner's equation (1958)

$$\theta(\psi) = \theta_r + \frac{\theta_s - \theta_r}{\alpha + (1 - \alpha)\exp(\psi / \psi_c)} \quad (12)$$

De la ecuación (4) se obtiene la capacidad de almacenamiento:

$$\mu(H) = (\theta_s - \theta_r) \left\{ 1 - \left[ \alpha + (1 - \alpha)\exp\left(\frac{H_s - H}{\lambda_c}\right) \right]^{-1} \right\} \quad (13)$$

y de la ecuación (11) la porosidad drenable:

$$v(H) = (\theta_s - \theta_r) \left\{ 1 - \frac{\lambda_c}{\alpha H} \ln \left[ \frac{1 - \alpha + \alpha \exp\left[\frac{(H - H_s)/\lambda_c}{1 - \alpha + \alpha \exp\left[-H_s/\lambda_c\right]}\right]}{1 - \alpha + \alpha \exp\left[-H_s/\lambda_c\right]}\right] \right\} \quad (14)$$

La lámina drenada, de acuerdo con Fuentes *et al.* (2009) es:

$$\ell(H) = (\theta_s - \theta_r) \left\{ (H_s - H) - \left(\frac{\lambda_c}{\alpha}\right) \ln \left[ \frac{1}{1 - \alpha + \alpha \exp\left(-\frac{(H_s - H)}{\lambda_c}\right)} \right] \right\} \quad (15)$$

El contenido de humedad a saturación puede ser asimilado a la porosidad total ( $\phi$ ), la cual es estimada a partir de la densidad total del suelo seco ( $\rho_t$ ) y de la densidad de las partículas ( $\rho_o$ ) con la fórmula  $\phi = 1 - \rho_t / \rho_o$ ; el contenido de humedad residual puede ser asumido igual a cero.

### Condiciones inicial y de frontera

La carga hidráulica contada a partir del estrato impermeable  $H(x,t)$  está relacionada con la carga  $h(x,t)$  contada a partir de los drenes, de acuerdo con la Figura 1, por:

$$H(x,t) = D_o + h(x,t) \quad (16)$$

$K(\psi) = K_s \exp(\psi / \lambda_c)$  widely used in theoretical studies. The corresponding  $\theta(\psi)$  curve is as follows:

$$\theta(\psi) = \theta_r + \frac{\theta_s - \theta_r}{\alpha + (1 - \alpha)\exp(\psi / \psi_c)} \quad (12)$$

From equation (4) the storage capacity is obtained:

$$\mu(H) = (\theta_s - \theta_r) \left\{ 1 - \left[ \alpha + (1 - \alpha)\exp\left(\frac{H_s - H}{\lambda_c}\right) \right]^{-1} \right\} \quad (13)$$

and from equation (11) the drainable porosity:

$$v(H) = (\theta_s - \theta_r) \left\{ 1 - \frac{\lambda_c}{\alpha H} \ln \left[ \frac{1 - \alpha + \alpha \exp\left[\frac{(H - H_s)/\lambda_c}{1 - \alpha + \alpha \exp\left[-H_s/\lambda_c\right]}\right]}{1 - \alpha + \alpha \exp\left[-H_s/\lambda_c\right]}\right] \right\} \quad (14)$$

The drainable depth, according to Fuentes *et al.* (2009) is:

$$\ell(H) = (\theta_s - \theta_r) \left\{ (H_s - H) - \left(\frac{\lambda_c}{\alpha}\right) \ln \left[ \frac{1}{1 - \alpha + \alpha \exp\left(-\frac{(H_s - H)}{\lambda_c}\right)} \right] \right\} \quad (15)$$

The saturated volumetric water content can be assimilated to the total porosity ( $\phi$ ), which is estimated from the bulk density ( $\rho_t$ ) and the particles density ( $\rho_o$ ) with the formula  $\phi = 1 - \rho_t / \rho_o$ ; the residual volumetric water content can be assumed equal to zero.

### Boundary and initial conditions

The hydraulic head counted from the impervious layer  $H(x,t)$  is related to the head  $h(x,t)$  counted from the drains, in accordance with Figure 1, by:

$$H(x,t) = D_o + h(x,t) \quad (16)$$

donde  $D_o$  es la altura de los drenes a partir del estrato impermeable. La variación transversal de  $h$  al inicio del proceso de drenaje es considerada como la condición inicial:

$$h(x,0) = h_s(x) \quad (17)$$

En cuanto a las condiciones de frontera o condiciones en los drenes ubicados en  $x=0$  y  $x=L$ , se han asumido formas diversas: abatimiento instantáneo en los drenes o condición de Dirichlet (Dumm, 1954), flujo proporcional a la carga o condición de radiación lineal ( $q \propto h$ ) (Fuentes *et al.*, 1997; Fragoza *et al.*, 2003), y de radiación fractal (Zavala *et al.*, 2004, 2007). La condición de radiación fractal se escribe como sigue:

$$-K_s \frac{\partial h}{\partial x} \pm q_s \left( \frac{h}{h_s} \right)^{2s} = 0 \quad (18)$$

donde el signo positivo corresponde al dren posicionado en  $x=0$ ; el negativo al posicionado en  $x=L$ ;  $q_s$  es el flujo correspondiente a  $h_s$  y depende de las características de la interfaz suelo-dren. En cuanto al exponente  $s$ , los autores argumentan que está definido por  $s=D/E$ , donde  $D$  es la dimensión fractal efectiva de la interfaz suelo-dren y  $E=3$  es la dimensión de Euclides del espacio físico. La relación entre  $s$  y la porosidad efectiva de la interfaz es proporcionada por la ecuación presentada por Fuentes *et al.* (2001):  $(1-\phi)^s + \phi^{2s} = 1$ . La ecuación (18) contiene como casos particulares la condición de radiación lineal cuando  $s=1/2$  y una condición de radiación cuadrática cuando  $s=1$ . El gasto de agua que fluye a través de la frontera por unidad de longitud de dren en un sistema de drenes paralelos se obtiene de las ecuaciones (2), (16) y (18).

$$Q_d(t) = 2[D_o + h(0,t)]q_s [h(0,t)/h_s]^{2s} \quad (19)$$

La evolución temporal de la lámina drenada se calcula con la siguiente expresión:

$$\ell(t) = \frac{1}{L} \int_0^t Q_d(\bar{t}) d\bar{t} \quad (20)$$

donde  $\bar{t}$  es una variable de integración.

where  $D_o$  is the height of the drains from impervious layer. The cross-sectional variation of  $h$  at the beginning of the drainage process is considered as the initial condition:

$$h(x,0) = h_s(x) \quad (17)$$

As for the boundary conditions or conditions in the drains located at  $x=0$  and  $x=L$ , various forms have been assumed: instant lowering in the drains or Dirichlet condition (Dumm, 1954), proportional flow to the head or condition of linear radiation ( $q \propto h$ ) (Fuentes *et al.*, 1997; Fragoza *et al.*, 2003) and fractal radiation (Zavala *et al.*, 2004, 2007). The condition of fractal radiation is written as follows:

$$-K_s \frac{\partial h}{\partial x} \pm q_s \left( \frac{h}{h_s} \right)^{2s} = 0 \quad (18)$$

where the positive sign corresponds to the drain positioned at  $x=0$ ; the negative sign to the positioned at  $x=L$ ;  $q_s$  is the corresponding flow to  $h_s$  and depends on the characteristics of the soil-drain interface. With regard to the exponent  $s$ , authors argue that it is defined by  $s=D/E$ , where  $D$  is the effective fractal dimension of the soil-drain interface and  $E=3$  is the Euclidean dimension of physical space. The relationship between  $s$  and the effective porosity of the interface is provided by the equation presented by Fuentes *et al.* (2001):  $(1-\phi)^s + \phi^{2s} = 1$ . Equation (18) includes as special cases the linear radiation condition when  $s=1/2$  and a quadratic radiation condition when  $s=1$ . The water flow across the boundary per length unit of drain on a system of parallel drains is obtained from equations (2), (16) and (18).

$$Q_d(t) = 2[D_o + h(0,t)]q_s [h(0,t)/h_s]^{2s} \quad (19)$$

The temporal evolution of the drained depth is calculated using the following expression:

$$\ell(t) = \frac{1}{L} \int_0^t Q_d(\bar{t}) d\bar{t} \quad (20)$$

where  $\bar{t}$  is a variable of integration.

## MATERIALES Y MÉTODOS

### Esquemas numéricos

La adaptación de la ecuación de Richards a la ecuación de Boussinesq requiere de la discretización del dominio como se muestra en la Figura 2. Para plantear la resolución numérica de la ecuación (1), se introducen los parámetros de interpolación definidos por:

$$\gamma = \frac{x_{i+\gamma} - x_i}{x_{i+1} - x_i}; \quad \omega = \frac{t_{j+\omega} - t_j}{t_{j+1} - t_j} \quad (21)$$

tales que  $0 \leq \gamma \leq 1$  y  $0 \leq \omega \leq 1$ ;  $i=1,2,\dots$  y  $j=1,2,\dots$  son los índices para el espacio y el tiempo respectivamente.

La variable dependiente ( $H$ ) en un nodo intermedio  $i+\gamma$  para todo  $j$  se estima como:

$$H_{i+\gamma}^j = (1-\gamma)H_i^j + \gamma H_{i+1}^j \quad (22)$$

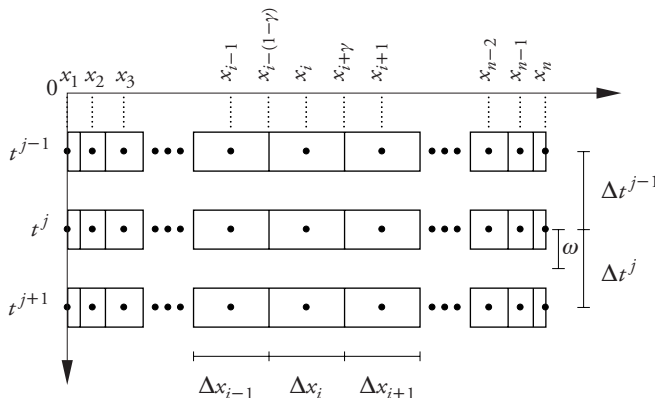
mientras que en el tiempo intermedio  $j+\omega$  para todo  $i$  se estima como:

$$H_i^{j+\omega} = (1-\omega)H_i^j + \omega H_i^{j+1} \quad (23)$$

La ecuación de continuidad se aplica en el tiempo  $t_{j+\omega}$ , la derivada temporal puede ser discretizada de acuerdo con las dos formulaciones siguientes:

$$\left. \frac{\partial(vH)}{\partial t} \right|_i^{j+\omega} = \frac{v_i^{j+1}H_i^{j+1} - v_i^jH_i^j}{\Delta t_j}; \quad \Delta t_j = t_{j+1} - t_j \quad (24)$$

$$\left. \frac{\partial(vH)}{\partial t} \right|_i^{j+\omega} = \mu_i^{j+\omega} \frac{H_i^{j+1} - H_i^j}{\Delta t_j} \quad (25)$$



## MATERIALS AND METHODS

### Numerical schemes

The adaptation of the Richards' equation to the Boussinesq's equation requires the discretization of the domain as shown in Figure 2. To pose the numerical solution of equation (1), the interpolation parameters are introduced and defined by:

$$\gamma = \frac{x_{i+\gamma} - x_i}{x_{i+1} - x_i}; \quad \omega = \frac{t_{j+\omega} - t_j}{t_{j+1} - t_j} \quad (21)$$

such that  $0 \leq \gamma \leq 1$  and  $0 \leq \omega \leq 1$ ;  $i=1,2,\dots$  and  $j=1,2,\dots$  are the indexes for space and time respectively.

The dependent variable ( $H$ ) in an intermediate node  $i+\gamma$  for all  $j$  is estimated as:

$$H_{i+\gamma}^j = (1-\gamma)H_i^j + \gamma H_{i+1}^j \quad (22)$$

while in the intermediate time  $j+\omega$  for all  $i$  is estimated as:

$$H_i^{j+\omega} = (1-\omega)H_i^j + \omega H_i^{j+1} \quad (23)$$

The equation of continuity is applied at the time  $t_{j+\omega}$ , the time derivative can be discretized according to the two following methods:

$$\left. \frac{\partial(vH)}{\partial t} \right|_i^{j+\omega} = \frac{v_i^{j+1}H_i^{j+1} - v_i^jH_i^j}{\Delta t_j}; \quad \Delta t_j = t_{j+1} - t_j \quad (24)$$

$$\left. \frac{\partial(vH)}{\partial t} \right|_i^{j+\omega} = \mu_i^{j+\omega} \frac{H_i^{j+1} - H_i^j}{\Delta t_j} \quad (25)$$

Figura 2. El dominio de resolución de la ecuación de Boussinesq:  $\omega$  es el factor de interpolación en el tiempo y  $\gamma$  es el factor de interpolación en el espacio.

Figure 2. The domain resolution of the Boussinesq equation:  $\omega$  is the interpolation factor in time and  $\gamma$  is the interpolation factor in space.



Para identificar en lo sucesivo a los dos esquemas numéricos resultantes, el primero es denominado esquema mixto y el segundo esquema en la carga, ya que en el primero aparecen de manera explícita la carga y el volumen de agua que se drena, mientras que en el segundo aparece explícitamente sólo la carga; las dos formulaciones coinciden cuando la porosidad drenable es independiente de la carga y la formulación en la carga no requiere de la integración numérica en la ecuación (7), para calcular la porosidad drenable. La discretización de la derivada espacial alrededor del nodo  $i$ -ésimo es la siguiente:

$$\left. \frac{\partial(Hq)}{\partial x} \right|_i^{j+\omega} = \frac{(Hq)_{i+\gamma}^{j+\omega} - (Hq)_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega}}{\Delta x_i};$$

$$\Delta x_i = (1-\gamma)(x_i - x_{i-1}) + \gamma(x_{i+1} - x_i) \quad (26)$$

De la ecuación (2) se obtiene el caudal unitario definido en los nudos intermedios:

$$(Hq)_{i+\gamma}^{j+\omega} = -T_{i+\gamma}^{j+\omega} \frac{H_{i+1}^{j+\omega} - H_i^{j+\omega}}{x_{i+1} - x_i}; \quad T_{i+\gamma}^{j+\omega} = T(H_{i+\gamma}^{j+\omega}) \quad (27)$$

$$(Hq)_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega} = -T_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega} \frac{H_i^{j+\omega} - H_{i-1}^{j+\omega}}{x_i - x_{i-1}};$$

$$T_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega} = T(H_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega}) \quad (28)$$

Las cargas en los diferentes nodos y en el tiempo intermedio se obtienen de la ecuación (23), las cuales son introducidas en las ecuaciones (27) y (28) y éstas a su vez en la ecuación (26). Luego, las ecuaciones (24) y (26) se llevan a la ecuación de continuidad y se asocian términos semejantes, resultando el sistema de ecuaciones algebraicas siguiente:

$$A_i H_{i-1}^{j+1} + B_i H_i^{j+1} + D_i H_{i+1}^{j+1} = E_i; \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \quad (29)$$

donde

$$A_i = -\frac{\omega T_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega}}{\Delta x_i (x_i - x_{i-1})} \quad (30)$$

$$B_i = \frac{\omega}{\Delta x_i} \left( \frac{T_{i+\gamma}^{j+\omega}}{x_{i+1} - x_i} + \frac{T_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega}}{x_i - x_{i-1}} \right) + \frac{v_i^{j+1}}{\Delta t_j} \quad (31)$$

To identify hereafter the two resulting numerical schemes, the first is called mixed scheme and the second head scheme, since in the first appear explicitly the head and volume of water drained, while in the second appears explicitly only the head; the two formulations coincide when the drainable porosity is independent of the head; and the head formulation does not require numerical integration in equation (7), to calculate drainable porosity. The discretization of the spatial derivative around the  $i^{\text{th}}$  node is:

$$\left. \frac{\partial(Hq)}{\partial x} \right|_i^{j+\omega} = \frac{(Hq)_{i+\gamma}^{j+\omega} - (Hq)_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega}}{\Delta x_i};$$

$$\Delta x_i = (1-\gamma)(x_i - x_{i-1}) + \gamma(x_{i+1} - x_i) \quad (26)$$

From equation (2) the unitary flow defined in the intermediate nodes is obtained:

$$(Hq)_{i+\gamma}^{j+\omega} = -T_{i+\gamma}^{j+\omega} \frac{H_{i+1}^{j+\omega} - H_i^{j+\omega}}{x_{i+1} - x_i}; \quad T_{i+\gamma}^{j+\omega} = T(H_{i+\gamma}^{j+\omega}) \quad (27)$$

$$(Hq)_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega} = -T_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega} \frac{H_i^{j+\omega} - H_{i-1}^{j+\omega}}{x_i - x_{i-1}};$$

$$T_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega} = T(H_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega}) \quad (28)$$

Heads on different nodes and in the intermediate time are obtained from equation (23), which are introduced in equations (27) and (28) and these in turn into equation (26). Then, equations (24) and (26) are taken to the continuity equation and similar terms are associated, resulting in the following algebraic system of equations:

$$A_i H_{i-1}^{j+1} + B_i H_i^{j+1} + D_i H_{i+1}^{j+1} = E_i; \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \quad (29)$$

where

$$A_i = -\frac{\omega T_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega}}{\Delta x_i (x_i - x_{i-1})} \quad (30)$$

$$B_i = \frac{\omega}{\Delta x_i} \left( \frac{T_{i+\gamma}^{j+\omega}}{x_{i+1} - x_i} + \frac{T_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega}}{x_i - x_{i-1}} \right) + \frac{v_i^{j+1}}{\Delta t_j} \quad (31)$$

$$D_i = -\frac{\omega T_{i+\gamma}^{j+\omega}}{\Delta x_i (x_{i+1} - x_i)} \tag{32}$$

$$D_i = -\frac{\omega T_{i+\gamma}^{j+\omega}}{\Delta x_i (x_{i+1} - x_i)} \tag{32}$$

$$E_i = R_{wi}^{j+\omega} + \frac{(1-\omega)}{\Delta x_i} \left( \frac{T_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega} H_{i-1}^j}{x_i - x_{i-1}} + \frac{T_{i+\gamma}^{j+\omega} H_{i+1}^j}{x_{i+1} - x_i} \right) + \left[ \frac{v_i^j}{\Delta t_j} - \frac{(1-\omega)}{\Delta x_i} \left( \frac{T_{i+\gamma}^{j+\omega}}{x_{i+1} - x_i} + \frac{T_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega}}{x_i - x_{i-1}} \right) \right] H_i^j \tag{33}$$

$$E_i = R_{wi}^{j+\omega} + \frac{(1-\omega)}{\Delta x_i} \left( \frac{T_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega} H_{i-1}^j}{x_i - x_{i-1}} + \frac{T_{i+\gamma}^{j+\omega} H_{i+1}^j}{x_{i+1} - x_i} \right) + \left[ \frac{v_i^j}{\Delta t_j} - \frac{(1-\omega)}{\Delta x_i} \left( \frac{T_{i+\gamma}^{j+\omega}}{x_{i+1} - x_i} + \frac{T_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega}}{x_i - x_{i-1}} \right) \right] H_i^j \tag{33}$$

Para el esquema en la carga, ecuación (25), los coeficientes  $B_i$  y  $E_i$  deben ser redefinidos reemplazando en las ecuaciones (31) y (33)  $v_i^{j+1}$  y  $v_i^j$  por  $\mu_i^{j+\omega}$ . Una vez especificadas las condiciones iniciales y de frontera, la ecuación (29) puede ser resuelta de manera eficiente mediante el algoritmo de Thomas (ver Zataráin *et al.*, 1998). Se debe notar que el sistema no es lineal, puesto que los coeficientes (ecuaciones 30-33) dependen de la propia solución. La resolución para cada paso de tiempo es, por lo tanto iterativa

For the head scheme, equation (25), the coefficients  $B_i$  and  $E_i$  must be redefined by replacing in equations (31) and (33)  $v_i^{j+1}$  and  $v_i^j$  by  $\mu_i^{j+\omega}$ . After specifying the boundary and initial conditions, equation (29) can be solved efficiently by Thomas algorithm (see Zataráin *et al.*, 1998). It should be noted that the system is not linear, since the coefficients (equations 30-33) depend on the solution itself. The resolution for each time step is therefore iterative.

**La condición de radiación fractal**

Para linealizar las condiciones de frontera, se introduce una generalización del coeficiente de conductancia, es decir:

$$\kappa = \frac{q_s}{K_s} \frac{L}{h_s} \left( \frac{h}{h_s} \right)^{2s-1} \tag{34}$$

Es necesario señalar que  $\kappa$  depende de la propia solución, sin embargo como el proceso de solución del sistema (29) es iterativo, este parámetro se calcula en función del estimador precedente.

**Selección de los incrementos espacial ( $\Delta x$ ) y temporal ( $\Delta t$ ) en la solución numérica**

De acuerdo con Zataráin *et al.* (1998) la discretización del dominio se realiza de modo que el incremento  $x_i - x_{i-1} = \delta x$  sea constante para  $i = 4, 5 \dots N-2$  excepto en la vecindad de los drenes, es decir para  $x_1 = 0$ : i)  $x_2 - x_1 = 0.4 \delta x$ ,  $x_3 - x_2 = 0.6 \delta x$ ,  $\Delta x_1 = 0.1 \delta x$ ;  $\Delta x_2 = 0.6 \delta x$  y ii)  $x_N = L$ ,  $x_N - x_{N-1} = 0.4 \delta x$ ,  $\Delta x_{N-1} = 0.6 \delta x$ ,  $\Delta x_N = 0.1 \delta x$ . El valor de interpolación en el espacio se toma como  $\gamma = \frac{1}{2}$  en el dominio excepto, como se puede inferir, en la primera y última celdas. En cuanto a la discretización del tiempo, dada la del espacio, se sigue el enfoque clásico de escribir las ecuaciones del

**The fractal radiation condition**

To linearize the boundary conditions, a generalization of the conductance coefficient is introduced, that is;

$$\kappa = \frac{q_s}{K_s} \frac{L}{h_s} \left( \frac{h}{h_s} \right)^{2s-1} \tag{34}$$

It should be noted that  $\kappa$  depends on the solution itself; however as the process of solution of the system (29) is iterative, this parameter is calculated based on the previous estimate.

**Selection of the spatial ( $\Delta x$ ) and temporal ( $\Delta t$ ) increments in the numerical solution**

According to Zataráin *et al.* (1998) the discretization of the domain is performed so that the increment  $x_i - x_{i-1} = \delta x$  be constant for  $i = 4, 5 \dots N-2$  except in the vicinity of the drains, that is for  $x_1 = 0$ : i)  $x_2 - x_1 = 0.4 \delta x$ ,  $x_3 - x_2 = 0.6 \delta x$ ,  $\Delta x_1 = 0.1 \delta x$ ;  $\Delta x_2 = 0.6 \delta x$  and ii)  $x_N = L$ ,  $x_N - x_{N-1} = 0.4 \delta x$ ,  $\Delta x_{N-1} = 0.6 \delta x$ ,  $\Delta x_N = 0.1 \delta x$ . The interpolation value in the space is taken as  $\gamma = \frac{1}{2}$  in the domain except as may be inferred, in the first and last cells. Regarding the time discretization, given that of space, it follows the classical approach to write the equations of movement in dimensionless form, valid in homogenous media, to obtain relations between the characteristic spatial and time scales. Introducing

movimiento en forma adimensional, válido en medios homogéneos, para obtener relaciones entre la escalas espaciales y temporales características. Introduciendo variables adimensionales en la ecuación de Boussinesq, ecuación (1), definidas como  $x_* = x / L$ ,  $t_* = t / \tau$ ,  $H_* = H / H_s$ ,  $\mu_* = \mu / v_s$ ,  $R_{w*} = R_w L^2 / T_s H_s$ , donde  $v_s = v(H_s)$  y  $T_s = K_s H_s$ , se obtiene la misma ecuación de Boussinesq con variables con asteriscos si  $\tau = v_s L^2 / T_s$ . Dada la naturaleza parabólica de la ecuación diferencial se define el parámetro  $M = (\Delta x_*)^2 / \Delta t_*$ , que se encuentra comparando la solución en diferencias finitas con soluciones analíticas. El valor del parámetro para los tiempos cortos recomendado por Zataráin *et al.* (1998) es del orden de  $M \approx 0.1$ .

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

### Comparación de la solución con una solución analítica

Para definir valores primeros de los parámetros de interpolación en el espacio y en el tiempo ( $\gamma$  y  $\omega$ ), la solución numérica se compara con una solución analítica obtenida de la ecuación de Boussinesq en un caso particular. Esta solución ha sido construida por Fuentes *et al.* (1997) para una linealización de la ecuación diferencial representada por una transmisibilidad constante pero con una condición de radiación lineal en los drenes y que incluye la ecuación clásica de Glover-Dumm (Dumm, 1954), a saber:

$$h(x,t) = h_s \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_n \exp\left(-\alpha_n^2 \frac{t}{\tau}\right) \left[ \cos\left(\alpha_n \frac{x}{L}\right) + \frac{\gamma_c}{\alpha_n} \sin\left(\alpha_n \frac{x}{L}\right) \right] \right\} \quad (35)$$

donde  $\tau = \bar{\mu} L^2 / \bar{T}$ ;  $\alpha_n$  son los valores propios y se obtienen de las raíces positivas de  $f(\alpha) = \alpha / \gamma_c - \gamma_c / \alpha - 2 \cot(\alpha) = 0$ ;  $A_n$  son las amplitudes correspondientes calculadas con la expresión  $A_n = 2 \left\{ \alpha_n \sin(\alpha_n) + \gamma_c [1 - \cos(\alpha_n)] \right\} / (\alpha_n^2 + \gamma_c^2 + 2\gamma_c)$ ; y  $\gamma_c$  es un coeficiente de conductancia de la interfaz suelo-dren.

Los valores utilizados para la simulación son los reportados por Fuentes *et al.* (1997), también utilizados por Fragoza *et al.* (2003), y corresponden a una parcela con drenaje subterráneo ubicada en el Distrito de Riego 076 Valle del Carrizo, Sinaloa,

dimensionless variables in the Boussinesq equation, equation (1), defined  $x_* = x / L$ ,  $t_* = t / \tau$ ,  $H_* = H / H_s$ ,  $\mu_* = \mu / v_s$ ,  $R_{w*} = R_w L^2 / T_s H_s$ , where  $v_s = v(H_s)$  y  $T_s = K_s H_s$ , the same Boussinesq equation is obtained with variables with asterisks if  $\tau = v_s L^2 / T_s$ . Given the parabolic nature of the differential equation the parameter  $M = (\Delta x_*)^2 / \Delta t_*$  is defined, which is found comparing the solution in finite differences with analytical solutions. The parameter value for short periods recommended by Zataráin *et al.* (1998) is of order  $M \approx 0.1$ .

## RESULTS AND DISCUSSION

### Comparison of the solution with an analytical solution

To define first values of interpolation parameters in space and time ( $\gamma$  and  $\omega$ ), the numerical solution is compared with a solution analytically obtained from the Boussinesq equation in a particular case. This solution has been constructed by Fuentes *et al.* (1997) for a linearization of the differential equation represented by a constant transmissivity but with a linear radiation condition in the drains and that includes the classical equation of Glover-Dumm (Dumm, 1954), namely:

$$h(x,t) = h_s \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_n \exp\left(-\alpha_n^2 \frac{t}{\tau}\right) \left[ \cos\left(\alpha_n \frac{x}{L}\right) + \frac{\gamma_c}{\alpha_n} \sin\left(\alpha_n \frac{x}{L}\right) \right] \right\} \quad (35)$$

where  $\tau = \bar{\mu} L^2 / \bar{T}$ ;  $\alpha_n$  are the own values and are obtained from the positive roots of  $f(\alpha) = \alpha / \gamma_c - \gamma_c / \alpha - 2 \cot(\alpha) = 0$ ;  $A_n$  are the corresponding amplitudes calculated with the expression  $A_n = 2 \left\{ \alpha_n \sin(\alpha_n) + \gamma_c [1 - \cos(\alpha_n)] \right\} / (\alpha_n^2 + \gamma_c^2 + 2\gamma_c)$ ; and  $\gamma_c$  is a conductance coefficient of the soil-drain interface.

The values used for simulation are those reported by Fuentes *et al.* (1997), also used by Fragoza *et al.* (2003), and correspond to a plot with underground drainage installed in a field of the 076 Irrigation District located in Valle del Carrizo, Sinaloa, México:  $L=50$  m,  $K_s=0.557$  m/d,  $\bar{\mu}=0.1087$  m<sup>3</sup>/m<sup>3</sup>,  $\bar{T}=2.5065$  m<sup>2</sup>/d,  $D_o=3.5$  m,  $H_s=5.0$  m and  $\kappa=1.5$ . To observe the effect that the parameter  $M$

México:  $L=50$  m,  $K_s=0.557$  m/d,  $\bar{\mu}=0.1087$  m<sup>3</sup>/m<sup>3</sup>,  $\bar{T}=2.5065$  m<sup>2</sup>/d,  $D_o=3.5$  m,  $H_s=5.0$  m y  $\kappa=1.5$ . Para observar el efecto que tiene el parámetro  $M$  en la solución numérica, se realizaron varias simulaciones y se calculó la suma de los cuadrados de los errores (SCE) asumiendo  $\Delta x$  constante y variando los valores de  $\omega$  y  $M$ . Los resultados se muestran en la Figura 3.

El cálculo de la SCE se realizó a intervalos de 1 día hasta un total de 60 días para evitar errores ocultos en los tiempos cortos. Se puede ver que la SCE es menor con valores de  $\omega$  cercanos a 1, y con valores de  $M$  menores a 0.5. Por otra parte al disminuir el valor de  $\omega$  los errores en la solución aumentan aún con valores menores de 0.5 en el parámetro  $M$ . De forma general puede apreciarse que conforme el valor de  $M$  aumenta y el valor de  $\omega$  disminuye, la SCE crece de manera significativa y viceversa. De esta manera, se pudo apreciar que mientras el valor ( $M > 0.4$ ), en la solución se presentaban inestabilidades en las fronteras, como las que se observan en la Figura 4. En ésta, se muestra la variación del abatimiento de la superficie libre, en todo el dominio de solución y un acercamiento sobre el dren, con diferentes pasos de interpolación ( $\omega$ ). La discretización en el espacio se realizó con  $\Delta x=1.00$  m y en el tiempo con  $\Delta t=0.01$  d, que corresponden a un valor de  $M \cong 4.33$ , valor que es superior al recomendado por Zataráin *et al.* (1998) para los tiempos cortos.

Para las simulaciones realizadas y la mostrada en la Figura 4 se pudo apreciar que el paso de

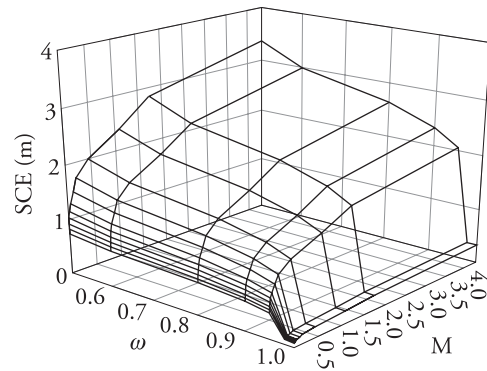


Figura 3. Suma de los cuadrados de los errores con diferentes valores de  $M$  y  $\omega$ .

Figure 3. Sum of the squares of errors with different values of  $M$  and  $\omega$ .

has on the numerical solution, several simulations were carried out and the sum of squares errors (SSE) was calculated assuming  $\Delta x$  constant and varying the values of  $\omega$  and  $M$ . The results are shown in Figure 3.

The calculation of the SSE was performed at intervals of 1 day to a total of 60 days to avoid errors hidden in the short times. One can see that the SSE is lower with values of  $\omega$  close to 1, and with  $M$  values lower than 0.5. On the other hand by reducing the value of  $\omega$  errors in the solution increase even with values lower than 0.5 in the parameter  $M$ . In general it can be seen that as the value of  $M$  increases and the value of  $\omega$  decreases, the SSE grows significantly and vice versa. Thus, it was observed that while the value ( $M > 0.4$ ), in the solution there were instabilities on the boundaries, as seen in Figure 4. This Figure

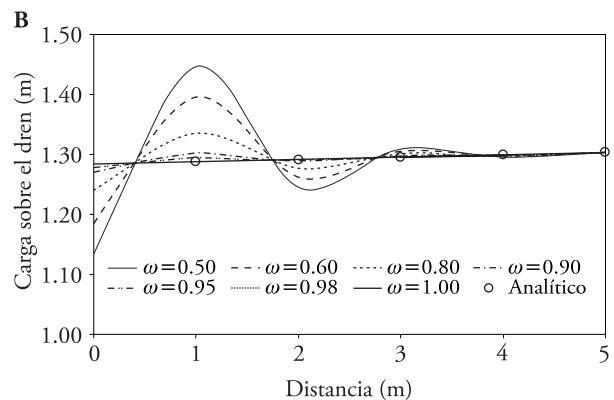
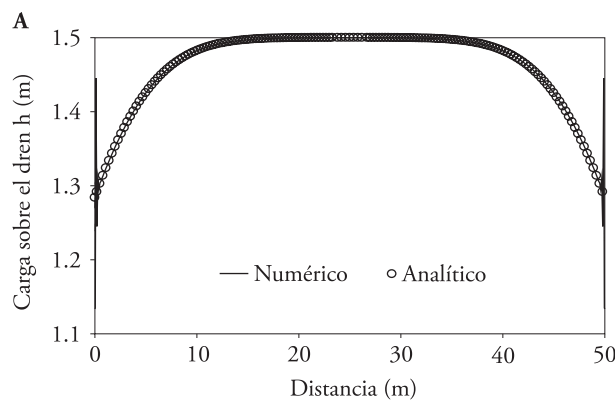


Figura 4. Evolución de la carga variando el parámetro de interpolación en el espacio ( $\omega$ ): A) Abatimiento de la superficie libre en un día, B) Abatimiento de la superficie sobre el dren en un día.

Figure 4. Evolution of the head by varying the parameter of interpolation in space ( $\omega$ ): A) Lowering of the free surface in a day, B) Lowering of the surface on the drain in one day.

interpolación óptimo que hace que la solución numérica coincida con la solución analítica, dado un criterio de error, es  $\omega=0.98$ , mismo resultado que se obtiene cuando  $\omega=1.00$ . Por otra parte, cuando el valor de  $M < 0.4$  las diferencias entre las solución numérica y la solución analítica con diferentes valores de  $\omega$  son mínimas. Un ejemplo de lo anterior es el que se muestra en la Figura 5, donde se puede observar el abatimiento del perfil para dos valores diferentes de  $M$ :  $M \cong 4.33$  ( $\Delta x=1.00$  m y  $\Delta t=0.01$  d) y  $M \cong 0.04$  ( $\Delta x=0.01$  m y  $\Delta t=0.0001$  d).

Con el primer valor de  $M$  puede verse que aún existen diferencias con los diferentes valores de  $\omega$  pero son mínimas, y utilizando la última opción se ve el buen acuerdo entre la solución analítica y la solución propuesta, dado un criterio de error. Con los valores de  $\Delta x=0.01$  m y  $\Delta t=0.0001$  d obtenidos con anterioridad, se procedió a realizar una simulación por un periodo de tiempo mayor, el cual se muestra en la Figura 6, donde se aprecia el abatimiento de la superficie libre y la evolución del volumen drenado por unidad de área de suelo. Los resultados muestran que no existen diferencias significativas entre la solución analítica y la solución en diferencias finitas.

**Comparación de los dos esquemas numéricos**

Los esquemas mixto y en carga se comparan entre sí aceptando los valores  $\gamma=0.5$  y  $\omega=0.98$ . El suelo utilizado es el caracterizado por Saucedo *et al.* (2003), con los valores  $\theta_s=0.5245$  cm<sup>3</sup>/cm<sup>3</sup>,  $\theta_r=0$  cm<sup>3</sup>/cm<sup>3</sup>,  $K_s=0.446$  m/d; los valores de los parámetros de las características hidrodinámicas son: i) para

shows the variation of lowering of free surface in the whole solution domain and an approach on the drain, with different steps of interpolation ( $\omega$ ). The discretization in space is performed with  $\Delta x=1.00$  m and in time with  $\Delta t=0.01$  d, corresponding to a value of  $M \cong 4.33$ , a value that is higher than that recommended by Zatarain *et al.* (1998) for short times.

For the simulations performed and that shown in Figure 4 it was observed that the optimal interpolation step which makes that the numerical solution coincides with the analytical solution, given an error criterion that is  $\omega=0.98$ , same result obtained when  $\omega=1.00$ . On the other hand, when the value of  $M < 0.4$  the differences between the numerical solution and the analytical solution with different values of  $\omega$  are minimal. An example of this is the one shown in Figure 5, where the lowering of the profile for two different values of  $M$  can be observed:  $M \cong 4.33$  ( $\Delta x=1.00$  m and  $\Delta t=0.01$  d) and  $M \cong 0.04$  ( $\Delta x=0.01$  m and  $\Delta t=0.0001$  d).

With the first value of  $M$  it can be seen that there are still differences with different values of  $\omega$  but are minimal, and using the last option the good agreement between the analytical solution and proposed solution can be seen, given an error criterion. With the values of  $\Delta x=0.01$  m and  $\Delta t=0.0001$  obtained previously, a simulation was performed for a longer period, which is shown in Figure 6, where the lowering of the free surface is shown and the evolution of the drained volume per unit area of soil is observed. The results showed no significant differences between the analytical solution and finite difference solution.

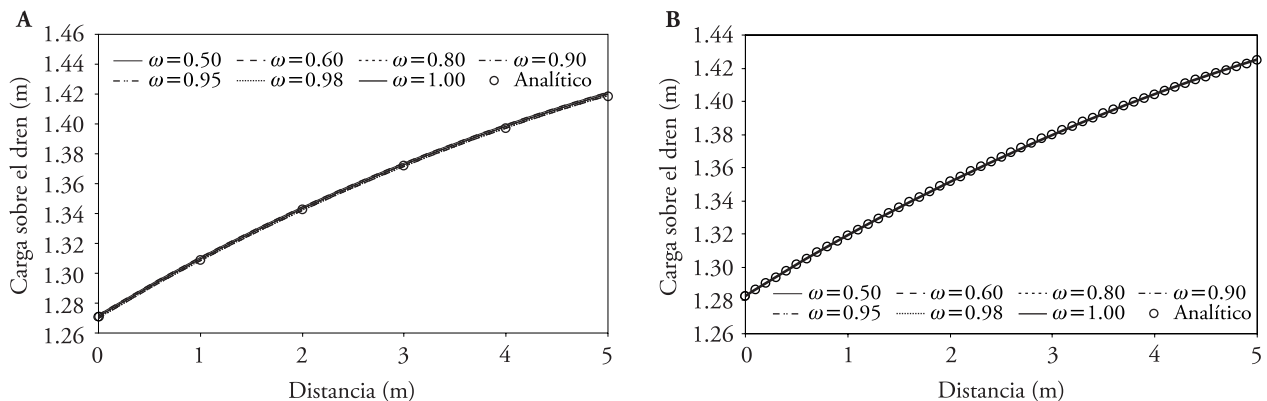


Figura 5. Abatimiento de la superficie libre, A)  $M \cong 0.43$ , B)  $M \cong 0.04$ .  
 Figure 5. Lowering of the free surface, A)  $M \cong 0.43$ , B)  $M \cong 0.04$ .

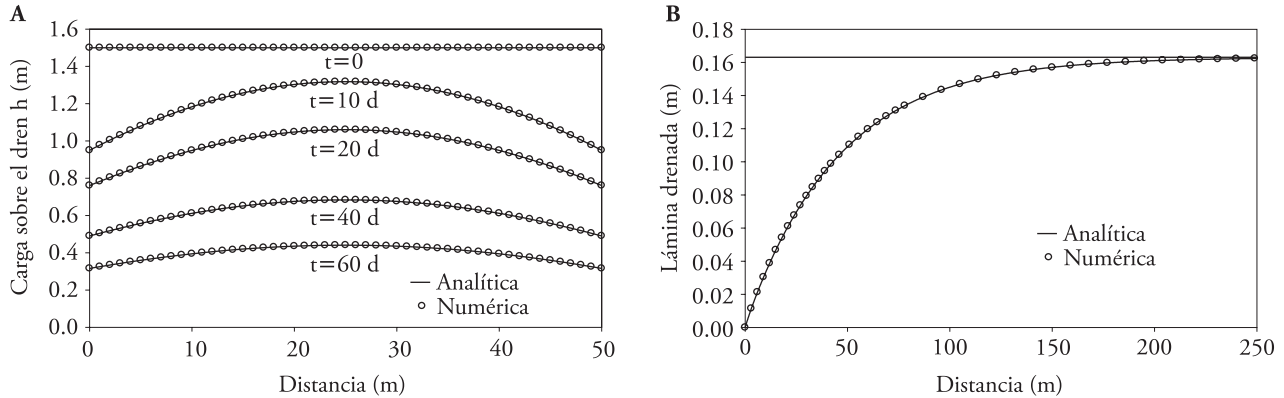


Figura 6. Comparación entre la solución numérica y la solución analítica: A) abatimiento de la superficie libre, B) evolución de la lámina drenada acumulada.

Figure 6. Comparison between the numerical and the analytical solution: A) Lowering of the free surface, B) Evolution of the cumulative drained depth.

Fujita y Parlange  $\lambda_c=0.521$  m y  $\alpha=0.98$ ; ii) para van Genuchten con la restricción  $m=1-2/n$ ,  $m=0.066$  y  $\psi_d=-0.15$  m. Para comparar los esquemas, se propone un distanciamiento entre drenes  $L=25$  m y una profundidad de drenes  $H_s=1.5$  m. Los resultados de la simulación numérica obtenidas con las dos características hidrodinámicas son mostradas en las Figuras 7 y 8. En la Figura 7 se muestra la evolución del abatimiento de la carga y la lámina drenada para tiempos de 60 y 250 d, respectivamente, utilizando las características hidrodinámicas de Fujita y Parlange, y en la Figura 8 se aprecian los resultados obtenidos con las características hidrodinámicas de van Genuchten para los tiempos mencionados con anterioridad. Puede verse que no existen diferencias

### Comparison of the two numerical schemes

Mixed and head schemes are compared with each other, accepting the values  $\gamma=0.5$  y  $\omega=0.98$ . The soil used is the one characterized by Saucedo et al. (2003), with values  $\theta_s=0.5245$  cm<sup>3</sup>/cm<sup>3</sup>,  $\theta_r=0$  cm<sup>3</sup>/cm<sup>3</sup>,  $K_s=0.446$  m/d; and the values of the parameters of the hydrodynamic characteristics are: i) for Fujita and Parlange  $\lambda_c=0.521$  m and  $\alpha=0.98$ ; ii) for van Genuchten with the restriction  $m=1-2/n$ ,  $m=0.066$  and  $\psi_d=-0.15$  m. To compare the schemes, a distance is proposed between drains  $L=25$  and a depth of drains  $H_s=1.5$  m. The numerical simulation results obtained with both hydrodynamic characteristics are shown in

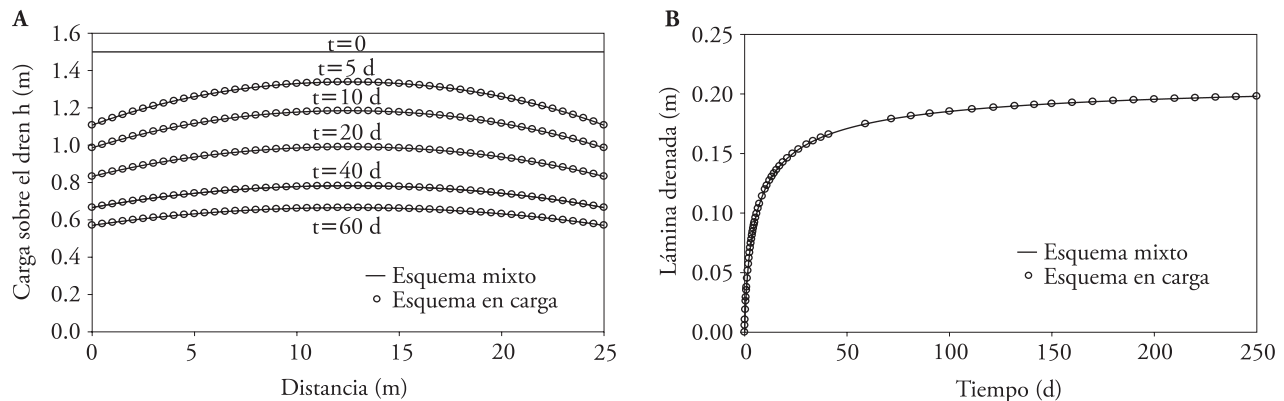


Figura 7. Comparación de los dos esquemas numéricos: A) abatimiento de la superficie libre, B) evolución de la lámina drenada, con las características hidrodinámicas de Fujita-Parlange.

Figure 7. Comparison of the two numerical schemes: A) Lowering of the free surface, B) Evolution of the drained depth, with the hydrodynamic characteristics of Fujita-Parlange.

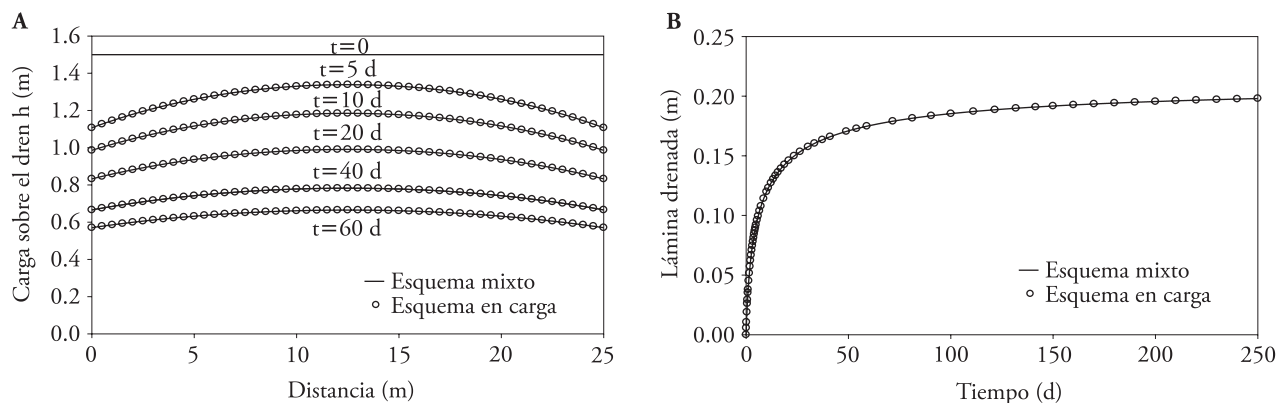


Figura 8. Comparación de los dos esquemas numéricos: A) abatimiento de la superficie libre, B) evolución de la lámina drenada, con las características hidrodinámicas de van Genuchten.

Figure 8. Comparison of the two numerical schemes: A) Lowering of the free surface, B) Evolution of the drained depth, with the hydrodynamic characteristics of van Genuchten.

aparentes entre los esquemas mixto y en carga con cada una de las características hidrodinámicas utilizadas, los resultados muestran que utilizar cualquiera de los dos esquemas conduce al mismo resultado.

**Problema inverso**

Para evaluar la capacidad de la condición de radiación fractal con capacidad de almacenamiento variable, se hace uso de la información experimental presentada por Zavala *et al.* (2003). Las características del módulo de drenaje y los parámetros del suelo usados en la simulación se muestran en el Cuadro 1.

Las características hidrodinámicas utilizadas son las de Fujita y Parlange, para lo cual se fija el valor de  $\alpha=0.98$  y los parámetros  $\lambda_c$  y  $\kappa_0$  se estiman mediante la minimización de la suma de los cuadrados de los errores entre la lámina drenada medida y la lámina drenada calculada con la solución numérica en el transcurso del tiempo. En la Figura 9 se presentan los

Figures 7 and 8. Figure 7 shows the evolution of the lowering of head and drained depth for times of 60 and 250 d, respectively, using the hydrodynamic characteristics of Fujita and Parlange, and Figure 8 shows the results obtained with the hydrodynamic characteristics of van Genuchten for the times listed above. It can be seen that there are no apparent differences between the mixed and head schemes with each of the hydrodynamic characteristics used, the results show that using either of the two schemes leads to the same result.

**Inverse problem**

To evaluate the capacity of the fractal radiation condition with variable storage capacity, the experimental information presented by Zavala *et al.* (2003) is used. The characteristics of the drainage module and the soil parameters used in the simulation are shown in Table 1.

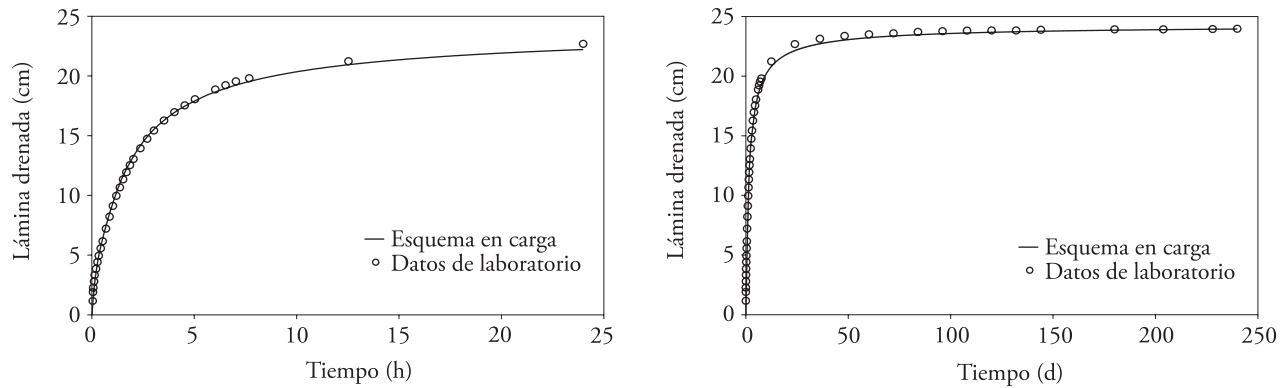
The hydrodynamic characteristics used are those of Fujita and Parlange, for which the value of  $\alpha=0.98$  is fixed and  $\lambda_c$  y  $\kappa_0$  parameters are estimated by minimizing the sum of squares errors between the drained depth measured and the drained depth calculated with the numerical solution over time. Figure 9 shows the results obtained from the inverse problem for 24 h and 240 h.

The two numerical schemes were used and the result was the same, however, only the head scheme with the fractal radiation condition is shown. The best approximation to the experimental data is

Cuadro 1. Características del módulo de drenaje y parámetros del suelo.

Table 1. Characteristics of the drainage module and soil parameters.

Características del módulo de drenaje	Parámetros del suelo
$H_s=120$ cm	$\phi=0.539$ cm <sup>3</sup> /cm <sup>3</sup>
$D_o=25$ cm	$K_s=18.3$ cm/h
$L=100$ cm	$s=0.7026$



**Figura 9. Evoluciones de la lámina experimental y calculada con la condición de radiación fractal y capacidad de almacenamiento variable, utilizando el esquema en carga.**  
**Figure 9. Evolutions of drained depth experimental and drained depth calculated with the fractal radiation condition and variable storage capacity, using the head scheme.**

resultados obtenidos del problema inverso para 24 h y 240 h.

Se usaron los dos esquemas numéricos y el resultado fue el mismo, sin embargo, sólo se muestra el esquema en carga con la condición de radiación fractal. La mejor aproximación a los datos experimentales es obtenida con  $\lambda_c=0.5152$  m y  $\kappa_0=0.10$  que proporcionan un  $ECM=0.1283$  cm. La condición de radiación fractal y la capacidad de almacenamiento variable reproducen de buena manera los datos medidos en laboratorio para el intervalo de tiempo menor a 6 h, posteriormente hay una ligera subestimación de los mismos hasta un tiempo de 150 h, sin embargo, el buen acuerdo entre la lámina drenada medida y la lámina drenada obtenida con el modelo es evidente.

### CONCLUSIONES

Se ha resuelto la ecuación unidimensional de Boussinesq del drenaje agrícola con el método de diferencias finitas basada en un balance local de masa. Resultaron dos esquemas de discretización de la derivada temporal, la cual representa el cambio de almacenamiento en este balance. En uno aparecen de manera explícita la carga y la porosidad drenable, variables ligadas con una relación funcional, que se ha denominado esquema mixto; en el otro aparece sólo la carga hidráulica, denominado esquema en carga. Los dos esquemas coinciden cuando la porosidad drenable es independiente de la carga. La validación parcial de ambos esquemas fue realizada mediante la comparación de las soluciones numéricas obtenidas

obtained with  $\lambda_c=0.5152$  m and  $\kappa_0=0.10$  to provide an  $SSE=0.1283$  cm. The fractal radiation condition and the variable storage capacity reproduce in a good way the data measured in the laboratory for the time interval less than 6 h, then there is a slight underestimation of them until a time of 150 h, however, the good agreement between the drained depth measured and the drained depth obtained with the model is evident.

### CONCLUSIONS

The one-dimensional Boussinesq equation of the agricultural drainage has been resolved with the finite-difference method based on a local mass balance. Two discretization schemes resulted of the time derivative, which represents the storage change in this balance. In one, head and drainable porosity appear explicitly, variables linked to a functional relationship which has been called mixed scheme, in the other; only the hydraulic head appears, called the head scheme. The two schemes coincide when the drainable porosity is independent of the head. Partial validation of both schemes was carried out by comparing the numerical solutions obtained with an analytical solution of literature built for conditions of linearity. The evolutions of the water head on the profile and drained depth calculated with the analytical solution are similar, under an error criterion, to those calculated with the numerical solution for all time. The absence of fluctuations both in time and space of head and drained depth allows recommending the proposed numerical



con una solución analítica de la literatura construida para condiciones de linealidad. Las evoluciones de la carga de agua en el perfil y la lámina drenada calculadas con la solución analítica son similares, bajo un criterio de error, a las calculadas con la solución numérica para todo tiempo. La ausencia de fluctuaciones tanto en el tiempo como en el espacio de la carga y de la lámina drenada permite recomendar los esquemas numéricos de la ecuación unidimensional de Boussinesq propuestos, para el estudio de la dinámica del agua en los sistemas de drenaje agrícola subterráneos. En particular, la solución numérica construida puede ser utilizada para la caracterización hidrodinámica del suelo a través de una modelación inversa, es decir, a partir de datos experimentales se pueden inferir los parámetros del sistema. Además, la solución numérica propuesta puede ser utilizada para un mejor diseño de sistemas de drenaje agrícola subterráneo ya que las hipótesis consideradas en las soluciones clásicas han sido eliminadas.

### LITERATURA CITADA

- Boussinesq J., 1904. Recherches théoriques sur l'écoulement des nappes d'eau infiltrées dans le sol et sur le débit des sources. *J. Math. Pure. Appl.* 5me. Ser. 10: 5-78.
- Bouwer H. 1964. Rapid field measurement of air entry value and hydraulic conductivity of soil as significant parameters in flow system analysis. *Water Resources Res.* 36: 411-424.
- Dumm, L. 1954. Drain spacing formula. *Agric. Engi.* 35: 726-730.
- Fragoza F., C. Fuentes, M. Zavala, F. Zataráin, H. Saucedo, y E. Mejía. 2003. Drenaje agrícola subterráneo con capacidad de almacenamiento variable. *Ing. Hidráulica Méx.* 18(3): 81-93.
- Fuentes C., F. Brambila, M. Vaucelin, J.-Y. Parlange, y R. Haverkamp. 2001. Modelación fractal de la conductividad hidráulica de los suelos no saturados. *Ing. Hidráulica Méx.* 16(2): 119-137.
- Fuentes C., R. Haverkamp, and J.-Y. Parlange. 1992. Parameter constraints on closed-form soil-water relationships. *J. Hydrol.* 134: 117-142.
- Fuentes C., R. Namuche, L. Rendón, R. Patrón, O. Palacios, F. Brambila, y A. González. 1997. Solución de la ecuación de Boussinesq del régimen transitorio en el drenaje agrícola bajo condiciones de radiación: el caso del Valle del Carrizo, Sinaloa. Hermosillo, México: VII Congreso Nacional de Irrigación. pp: 3-141 a 3-145.
- Fuentes C., M. Zavala, and H. Saucedo. 2009. Relationship between the Storage Coefficient and the Soil-Water Retention schemes of the one-dimensional Boussinesq equation for the study of dynamics of water in agricultural underground drainage systems. In particular, the constructed numerical solution can be used for the hydrodynamic characterization of soil through an inverse modeling, from the experimental data can be inferred the system parameters. In addition, the proposed numerical solution can be used to design better agricultural underground drainage systems since the hypotheses considered in the classical solutions have been eliminated.

—End of the English version—



Curve in Subsurface Agricultural Drainage Systems: Water Table Drawdown. *J. Irrigation and Drainage Eng.* 135(3): 279-285.

Fujita H. 1952. The exact pattern of a concentration-dependent diffusion in a semi-infinite medium, part II. *Textil Res. J.* 22: 823-827.

Gardner W. R. 1958. Some steady-state solutions of the unsaturated moisture flow equation with application to evaporation from a water table. *Soil Sci.* 85: 228-232.

Hooghoudt S. 1940. Bijdrage tot de kennis van enige natuurkundige grootheden van der grond. *Verslag andbouw Onderzoek* 46(7): 515-707.

Parlange J.-Y., R. D. Braddock, I. Lisle, and R. E. Smith. 1982. Three parameter infiltration equation. *Soil Sci.* 11: 170-174.

Richards L. A. 1931. Capillary conduction of liquids through porous mediums. *Physics* 1: 313-333.

Saucedo H., P. Pacheco, C. Fuentes, y M. Zavala. 2003. Efecto de la posición del manto freático en la evolución del frente de avance en el riego por melgas. *Ing. Hidráulica Méx.* 18(4): 119-126.

Van Genuchten M. 1980. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of the unsaturated soils. *Soil Sci. Soc. Amer. J.* 44: 892-898.

Zataráin F., C. Fuentes, V. O. L. Palacios, E. J. Mercado, F. Brambila, y N. Villanueva. 1998. Modelación del transporte de agua y de solutos en el suelo. *Agrociencia* 32(4): 373-383.

Zavala M., C. Fuentes, y H. Saucedo. 2003. Sobre la condición de radiación lineal en el drenaje de una columna de suelo inicialmente saturado. *Ing. Hidráulica Méx.* 18 (2): 121-131.

Zavala M., C. Fuentes, y H. Saucedo. 2004. Radiación fractal en la ecuación de Boussinesq del drenaje agrícola. *Ing. Hidráulica Méx.* 19(3): 103-111.

Zavala M., C. Fuentes, y H. Saucedo. 2007. Nonlinear radiation in the Boussinesq equation of agricultural drainage. *J. Hydrol.* 332(3): 374-380.