

Artículo publicado en el Repositorio Institucional del IMTA

<i>Título</i>	Modelos de catástrofe del flujo alrededor de objetos sumergidos.
<i>Autor / Adscripción</i>	Polioproto F. Martínez Austria Instituto Mexicano de Tecnología del Agua
<i>Publicación</i>	Tecnología y Ciencias del Agua, 1(1): 7-19
<i>Fecha de publicación</i>	2010
<i>Resumen</i>	En la mecánica de fluidos existen diversos fenómenos que exhiben un comportamiento histerético y con cambios súbitos no sólo de orden cuantitativo, sino también cualitativos. Tales fenómenos pueden ser representados y explicados mediante la teoría de la catástrofe, que permite explicar este tipo de respuesta observada en algunos sistemas físicos. En este artículo se demuestra analíticamente que el flujo alrededor de cilindros sumergidos en un flujo constituye una catástrofe del tipo en pliegue.
<i>Identificador</i>	<a href="http://hdl.handle.net/123456789/1311">http://hdl.handle.net/123456789/1311</a>

# MODELOS DE CATÁSTROFE DEL FLUJO ALREDEDOR DE OBJETOS SUMERGIDOS

• Polioptro F. Martínez-Austria •  
*Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, México*

## Resumen

En la mecánica de fluidos existen diversos fenómenos que exhiben un comportamiento histerético y con cambios súbitos no sólo de orden cuantitativo, sino también cualitativos. Tales fenómenos pueden ser representados y explicados mediante la teoría de la catástrofe, que permite explicar este tipo de respuesta observada en algunos sistemas físicos. En este artículo se demuestra analíticamente que el flujo alrededor de cilindros sumergidos en un flujo constituye una catástrofe del tipo en pliegue. Ampliando este resultado, ahora con un enfoque semi-empírico, se puede demostrar que el flujo alrededor de cilindros y esferas con rugosidad se puede representar mediante una geometría de catástrofe tipo cúspide. Ambos resultados respaldan la hipótesis de que el flujo alrededor de objetos sumergidos en líquidos se puede modelar mediante geometrías de catástrofe y explicar así la ocurrencia de bifurcación, bimodalidad, saltos bruscos e histéresis.

**Palabras clave:** aplicaciones teoría de la catástrofe, teoría de la catástrofe, flujo alrededor de objetos sumergidos, histéresis en mecánica de fluidos, mecánica de fluidos, catástrofe cúspide.

## Introducción

En 1972, René Thom publicó el libro titulado *Stabilité Structurelle et Morphogénèse* (Thom, 1974). En esta obra expuso por primera vez, de manera sistemática, los principios de la teoría de la catástrofe. Desde entonces, dicha teoría ha adquirido importancia como una técnica útil para modelar fenómenos de comportamiento discontinuo e histerético. La teoría de la catástrofe se ha aplicado principalmente en las ciencias sociales y biológicas, en menor grado en las ciencias exactas y con menor frecuencia en la mecánica de fluidos e ingeniería. No obstante, con cada vez mayor frecuencia se amplían las aplicaciones en diversos campos, por ejemplo para la operación de presas (Kuman y Chauhan, 2009) y en la modelación de flujos de debris (Cui *et al.*, 1996).

La teoría de la catástrofe puede aplicarse a la modelación de fenómenos reales de manera cualitativa o cuantitativa. En particular, la

teoría de la catástrofe tiene sus más amplias aplicaciones de manera cualitativa. Desde un punto de vista conceptual, predominantemente descriptivo, valiéndose de las características de las superficies de equilibrio de las funciones de catástrofe, más que a un método matemático riguroso, la teoría de la catástrofe se utiliza de manera cualitativa cuando las ecuaciones que gobiernan al fenómeno físico en estudio son desconocidas o no se dispone de soluciones. En particular, debido a la falta de soluciones analíticas de las ecuaciones de Navier-Stokes, las aplicaciones analíticas de la teoría de la catástrofe en mecánica de fluidos son escasas y se extiende más un enfoque semi-empírico, en el que se emplean de manera descriptiva las diversas geometrías de catástrofe.

El propósito de este documento es evaluar, mediante el empleo de la teoría de la catástrofe, de manera tanto cuantitativa como cualitativa, la hipótesis de que el flujo alrededor de objetos sumergidos se puede

describir mediante modelos o superficies de catástrofe. Para ello será necesario describir algunos de los conceptos fundamentales de la teoría de la catástrofe.

### La teoría de la catástrofe y la mecánica de fluidos

*Conceptos fundamentales de la teoría de la catástrofe*

Se dice que la función  $f:R^n \rightarrow R$  tiene un punto crítico en  $p$  si:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_p = \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_p = \dots = \left. \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|_p = 0 \quad (1)$$

Los puntos críticos de una función son topológicamente importantes debido a que definen su forma cualitativa y, por tanto, el comportamiento general del fenómeno real que representan.

El tipo de puntos críticos de una función puede establecerse mediante el determinante de la matriz hessiana, conocida también como la matriz de estabilidad:

$$Hf = \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right] \quad j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2)$$

Si el factor determinante de esta matriz no es nulo:

$$\det Hf \neq 0 \quad (3)$$

en los puntos críticos  $p$ , entonces éstos no son degenerados. Geométricamente hablando, los puntos críticos no degenerados son máximos, mínimos o puntos silla. Al aplicar el teorema de Morse (1931), este tipo de funciones se puede reducir a la forma cuadrática:

$$f = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \quad (4)$$

Donde  $\lambda_i$  son los autovalores (o *eigenvalores*) de la matriz de estabilidad y se conocen como funciones de Morse.

Cuando la matriz de estabilidad es singular en un punto crítico  $u$ , esto es, cuando:

$$\det = Hf|_p = 0 \quad (5)$$

el punto crítico se denomina degenerado. Bajo estas condiciones, si no se aplica la teoría de la catástrofe, se puede decir poco sobre el comportamiento de la función alrededor del punto crítico. El teorema de Morse no es aplicable y, en principio, no existe ninguna forma canónica a la cual se pueda reducir la función.

Los puntos críticos degenerados son de mayor interés debido a que están relacionados con inestabilidades de la función. Se dice que una función  $f:R^n \rightarrow R$  es estructuralmente estable si para cada perturbación lo suficientemente pequeña  $p:R^n \rightarrow R$ , la función perturbada  $f+p$  mantiene el mismo número y tipo de puntos críticos que la función original  $f$ . Esto es, si existe un difeomorfismo que transfiera  $f$  a  $f+p$ .

En un sentido geométrico, esto significa que la función perturbada  $f+p$  mantiene el mismo número y tipo de puntos críticos que la función original  $f$ ; esto es, que es cualitativamente igual.

Las funciones con puntos críticos no degenerados, o funciones de Morse, son estructuralmente estables. Las funciones con puntos críticos degenerados son estructuralmente inestables.

Cuando la función representa un fenómeno físico, el concepto de inestabilidad estructural implica que el fenómeno real modelado por la función se puede modificar significativamente con una pequeña perturbación. Este tipo de comportamiento es conocido desde hace mucho tiempo en mecánica de fluidos. Birkhoff (1950) citó ciertos casos de flujos con esta propiedad y estableció que existe la posibilidad, en mecánica de fluidos, de que "causas arbitrariamente pequeñas puedan producir efectos finitos". De hecho, en un fenómeno estructuralmente inestable, vemos no sólo cambios cuantitativos,

sino también cambios cualitativos, bajo pequeñas perturbaciones.

Generalmente, una función tiene en su mayor parte puntos críticos no degenerados, dependiendo de los valores de sus parámetros y sólo en algunos intervalos tiene puntos críticos degenerados.

Para una familia de funciones  $f:R^n \times R^k \rightarrow R$ , con  $n$  variables, llamadas variables de estado, y con parámetros  $k$ , llamados parámetros de control, Thom estableció la existencia de formas canónicas si  $n \leq 2$  y  $k \leq 5$ . Estas formas canónicas se conocen como funciones de catástrofe. El cuadro 1 muestra las funciones de catástrofe elementales.

La condición:

$$\nabla f(x_i, a_j) = 0 \quad (6)$$

define la superficie de equilibrio o de estado de cada función de catástrofe. Estas superficies son de especial importancia, ya que el comportamiento de histéresis y de discontinuidad, entre otras peculiaridades, se puede establecer y modelar en ellas.

La figura 1 muestra la geometría de la catástrofe en cúspide, donde las principales características de los fenómenos de catástrofe —histéresis, bimodalidad, divergencia y saltos bruscos— se pueden observar claramente.

Cuadro 1. Funciones elementales de catástrofe.

Función de catástrofe	Nombre
$x^3 + a_1 x$	Pliegue
$\pm x^4 + a_1 x + a_2 x^2$	Cúspide
$x^5 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$	Cola de golondrina
$\pm x^6 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$	Mariposa
$x^7 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5$	
$x^2 y - y^3 + a_1 x + a_2 y + a_3 y^2$	Umbílica elíptica
$x^2 y + y^3 + a_1 x + a_2 y + a_3 y^2$	Umbílica hiperbólica
$x^2 y + y^4 + a_1 x + a_2 y + a_3 y^2 + a_4 x^2$	Umbílica parabólica
$x^2 y - y^5 + a_1 x + a_2 y + a_3 y^2 + a_4 x^2 + a_5 y^3$	
$x^2 y + y^5 + a_1 x + a_2 y + a_3 y^2 + a_4 x^2 + a_5 y^3$	
$x^3 \pm y^4 + a_1 x + a_2 y + a_3 x y + a_4 y^2 + a_5 x y^2$	

En la figura 2 se puede ver la geometría de una catástrofe en pliegue, que es la más simple, y se empleará más tarde. En este caso, el conjunto bifurcación se reduce a un punto, y no se observa histéresis o saltos bruscos, sino solamente una bifurcación de las soluciones de la función.

#### *Estabilidad estructural de flujos potenciales*

La teoría de la catástrofe se ha empleado satisfactoriamente en varias funciones de diferentes tipos. Sin embargo, su aplicación rigurosa ha sido principalmente en el análisis de funciones tipo gradiente.

Consideremos un sistema de ecuaciones  $f_i$  que pueda derivarse de una potencial:

$$f_i = \frac{\partial}{\partial x_i} v(x_i, a_j) \quad (7)$$

donde  $x_i$  representa variables de estado y  $a_j$  son parámetros de control. La función  $v(x_i, a_j)$  será la función potencial. El equilibrio de ésta, conocido como un sistema de gradientes, aparece cuando:

$$f_i = \frac{\partial}{\partial x_i} v(x_i, a_j) = 0 \quad (8)$$

que corresponde a la condición de ocurrencia de puntos críticos, como se estableció anteriormente. La teoría de la catástrofe puede aplicarse entonces al estudio de cambios de estado del sistema (los cambios en  $x_i$ ), en equilibrio, a medida que los parámetros de control  $a_j$  son modificados.

La función  $f_i$  puede interpretarse de varias maneras, según el sistema real que se modele. Es un hecho bien conocido en mecánica de fluidos que si un flujo es irrotacional habrá una función  $\phi$  tal que:

$$\bar{v} = \text{grad } \phi \quad (9)$$

o, empleando la notación para la ecuación (7):

$$v_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \phi(x_i, a_j) \quad i = 1, 2, 3 \quad (10)$$

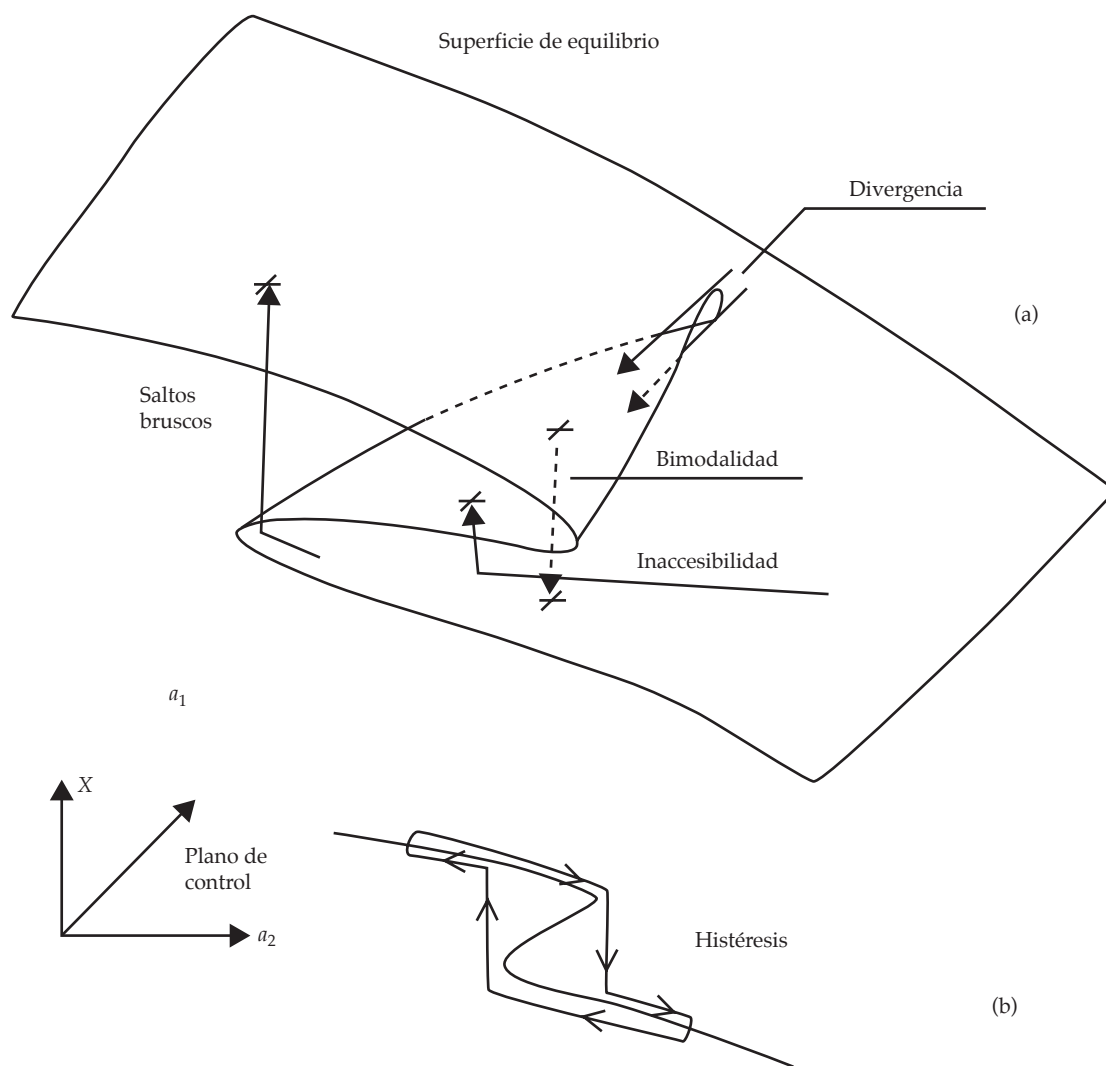


Figura 1. Geometría de catástrofe en cúspide, (a) superficie de equilibrio, (b) corte transversal en la superficie de equilibrio.

donde  $v_i$  indica el componente de velocidad en la coordenada  $x_i$ , mientras que el parámetro de control  $a_j$  tendrá significado de acuerdo con la función potencial de que se trate.

Ya que los componentes de velocidad, en términos de la función potencial, están dados por la ecuación (10), entonces, la condición de ocurrencia de puntos críticos o condición de equilibrio definida por la ecuación:

$$v_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \phi(x_i, a_j) = 0 \quad (11)$$

es igual a la condición de velocidad nula; esto es, son puntos de estancamiento.

Se puede deducir, como resultado de la aplicación de la teoría de la catástrofe a flujos potenciales, la importancia de los puntos de estancamiento, porque éstos determinan la estabilidad estructural de los flujos modelados.

Dependiendo del tipo de puntos de estancamiento de un flujo potencial, entonces se pueden determinar puntos de estancamiento degenerados o no degenerados, y el propio

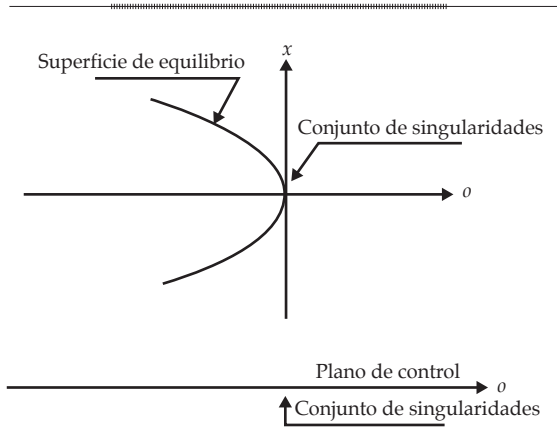


Figura 2. Superficie de equilibrio, conjunto de singularidades y conjunto de bifurcaciones de la catástrofe en pliegue.

flujo será estructuralmente estable o inestable, respectivamente.

En el caso de flujos inestables, su función potencial debe poder ser reducida a una función de catástrofe.

### Modelo de catástrofe para un flujo alrededor de un cilindro circulante

Considérese en primer término la estabilidad estructural de un flujo potencial clásico: el flujo alrededor de un cilindro con circulación, cuyo potencial en coordenadas cartesianas está dado por:

$$\phi = Ux + \frac{Ua^2x}{x^2 + y^2} - \frac{\Gamma}{2\pi} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (12)$$

La condición para la ocurrencia de puntos críticos es el cumplimiento simultáneo de las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{y^2 \left( \frac{\Gamma}{2\pi} y + Ua^2 \right) + x^2 \left( \frac{\Gamma}{2\pi} y - Ua^2 \right)}{(x^2 + y^2)^2} + U = 0 \quad (13.1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{-x \left[ y \left( 2Ua^2 + \frac{\Gamma}{2\pi} y \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} + x^2 \right]}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \quad (13.2)$$

La ecuación (13.2) se cumple si:

$$a) \quad x = 0 \quad (14.1)$$

o si:

$$b) \quad y \left( 2Ua^2 + \frac{\Gamma}{2\pi} y + \frac{\Gamma}{2\pi} x^2 \right) = 0 \quad (14.2)$$

que debe satisfacer simultáneamente la ecuación (13.1). Se puede demostrar que (14.2) no cumple con esta condición.

Al sustituir (14.1) en (13.1), y después de realizar algunas operaciones algebraicas, se obtiene:

$$Uy^2 + \frac{\Gamma}{2\pi} y + Ua^2 = 0 \quad (15)$$

cuyas soluciones quedan determinadas mediante la ecuación:

$$y = \frac{1}{2U} \left\{ \frac{\Gamma}{2\pi} \pm \left[ \left( \frac{\Gamma}{2\pi} \right)^2 - 4U^2 a^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (16)$$

Se obtiene así la ubicación de los puntos críticos, en las coordenadas dadas por:

$$x = 0; \quad y = \frac{1}{2U} \left\{ -\frac{\Gamma}{2\pi} + \left[ \left( \frac{\Gamma}{2\pi} \right)^2 - 4U^2 a^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (17)$$

Las segundas derivadas parciales de la función potencial (ecuación (12)) son:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{-2 \left( \frac{\Gamma}{2\pi} y + Ua^2 \right) (x^3 + xy^2)}{(x^2 + y^2)^3} \quad (18.1)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\frac{\Gamma}{\pi} x^3 y + xy^3 \left( 8Ua^2 - \frac{\Gamma}{2\pi} \right) - 2Ua^2 x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3} \quad (18.2)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} = \frac{\left( 2Ua^2 + \frac{\Gamma}{2\pi} y \right) (3x^2 y - y^3) - \frac{\Gamma}{2\pi} (x^4 - 3x^2 y)}{(x^2 + y^2)^3} \quad (18.3)$$

Es evidente, de la ecuación (17), que los puntos críticos ocurren en el eje  $y$ , por tanto, al introducir la condición  $x=0$ , las ecuaciones presentadas anteriormente se simplifican a:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \quad (19.1)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (19.2)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -\frac{\left( 2Ua^2 + \frac{\Gamma}{2\pi} y \right)}{y^3} \quad (19.3)$$

La matriz de estabilidad estará dada entonces por:

$$H\phi = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\left( 2Ua^2 + \frac{\Gamma}{2\pi} y \right)}{y^3} \\ -\frac{\left( 2Ua^2 + \frac{\Gamma}{2\pi} y \right)}{y^3} & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

y su determinante igualado a cero resulta:

$$\det H\phi = -\frac{\left( 2Ua^2 + \frac{\Gamma}{2\pi} y \right)^2}{y^6} = 0 \quad (21)$$

Ocurrirán puntos críticos degenerados cuando las ecuaciones (17) y (21) se satisfagan simultáneamente.

Si se define un parámetro adimensional:

$$c = \frac{\Gamma}{Ua} \quad (22)$$

que equivale a decir que la circulación alrededor del cilindro es  $\Gamma=cUa$ , la ecuación (17) se puede reescribir como:

$$y = -\frac{ca}{4\pi} \pm \frac{a}{2} \left[ \left( \frac{c}{2\pi} \right)^2 - 4 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (23)$$

La figura 3 muestra la gráfica para esta ecuación y la solución para la ecuación (21), para un cilindro con un radio unitario, en términos del parámetro adimensional  $c$ . Puede verse que existe solamente un punto crítico degenerado, el cual ocurre cuando  $c=4\pi$ .

Para esta ecuación no existe una solución real para valores de  $c < 4\pi$ . Existen dos soluciones posibles para los valores de  $c > 4\pi$ , de manera que el punto  $c=4\pi$  es un punto de bifurcación.

En la figura 4 se muestra la configuración del flujo para los diferentes valores de  $c$ .

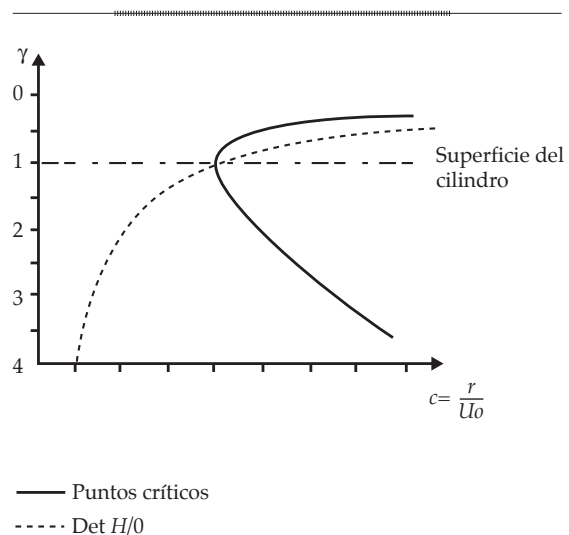


Figura 3. Puntos críticos alrededor de un cilindro con circulación.

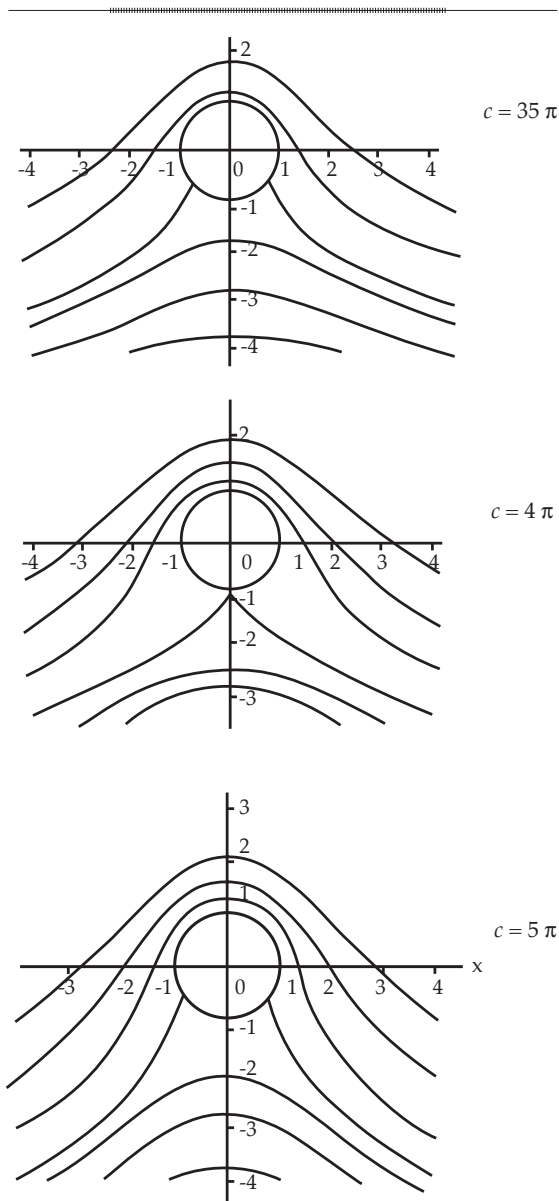


Figura 4. Flujo alrededor de un cilindro para diferentes valores de  $C$ .

Dado que existe un punto crítico degenerado, el comportamiento del potencial debería describirse mediante una función de catástrofe. Considérese una vez más la condición de ocurrencia de puntos críticos en términos del parámetro  $c$ , dada por la ecuación (23). Si ambos términos se elevan al cuadrado y se colocan a la izquierda de la igualdad, se obtiene:

$$y^2 - \left\{ -\frac{ca}{4\pi} \pm \frac{a}{2} \left[ \left( \frac{c}{2\pi} \right)^2 - 4 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^2 = 0 \quad (24)$$

y si se denota:

$$a_1 = - \left\{ -\frac{ca}{4\pi} \pm \frac{a}{2} \left[ \left( \frac{c}{2\pi} \right)^2 - 4 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^2 = 0 \quad (25)$$

entonces, la ecuación (24) se identifica fácilmente como la ecuación de la superficie de equilibrio de una catástrofe en pliegue.

$$\nabla\phi = y^2 + a_1 = 0 \quad (26)$$

Queda demostrado que el comportamiento del flujo alrededor de un cilindro con circulación se modela mediante una función de catástrofe, tipo pliegue, que es la más simple de todas, como se puede apreciar en la figura 2.

### Modelo de catástrofe en cúspide para flujo alrededor de cilindros y esferas

Ya que el flujo alrededor de cilindros circulares es una función de catástrofe, la secuencia lógica es probar que lo mismo sea cierto para el flujo alrededor de esferas. En este caso, sin embargo, es conveniente usar un enfoque más cualitativo, usando alguna geometría de catástrofe y los abundantes datos experimentales que se encuentran en la literatura. Antes de proceder de esta manera es necesario mencionar algunos fundamentos de las convenciones de catástrofe.

Dependiendo del sistema físico a ser analizado, es necesario establecer convenciones para la forma en que se lleva a cabo la transición entre estados de equilibrio. Estas convenciones se conocen como *convenciones de catástrofe*, y son principalmente dos:

- *Convención de retraso*: el sistema permanecerá en el estado de equilibrio en que se encuentra (el mínimo en que se encuentra) hasta que



ese estado (ese mínimo) desaparezca. La resultante geometría de la catástrofe exhibe una zona de histéresis, como se muestra en la figura 1.

- *Convención de Maxwell*: el sistema permanecerá en el estado de equilibrio que minimice globalmente la función (en el mínimo global). En la resultante geometría de la catástrofe, la zona de histéresis desaparece, permaneciendo sólo la ocurrencia de saltos bruscos. Así lo muestra la figura 5.

Para elegir una convención u otra se requiere contar con información del fenómeno real que se analiza. Debido a esto, las convenciones de catástrofe son en realidad una extensión de la teoría, con miras a su aplicación a sistemas reales. El empleo de una u otra convención depende del comportamiento del sistema real. Si en éste no se observa histéresis, no podrá usarse la convención de retraso; sin embargo, es factible modelarlo mediante la teoría de la catástrofe si existen saltos bruscos, usando la Convención de Maxwell.

En el flujo alrededor de objetos sumergidos, la variación del coeficiente de arrastre exhibe saltos bruscos, en relación con el número de Reynolds. El coeficiente de arrastre total  $C_D$  depende de la geometría del objeto y si no hay efectos de superficie libre o de compresibilidad, solamente del número de Reynolds:  $Re=VL/v$ , donde  $L$  es una longitud característica, tal como el diámetro de cilindros o esferas.

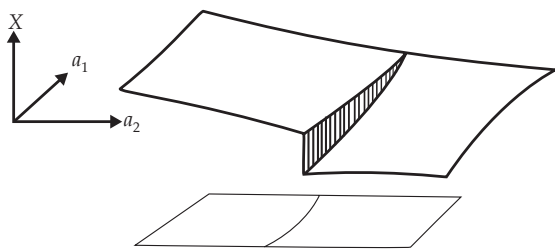


Figura 5. Geometría de la catástrofe en cúspide, Convención de Maxwell.

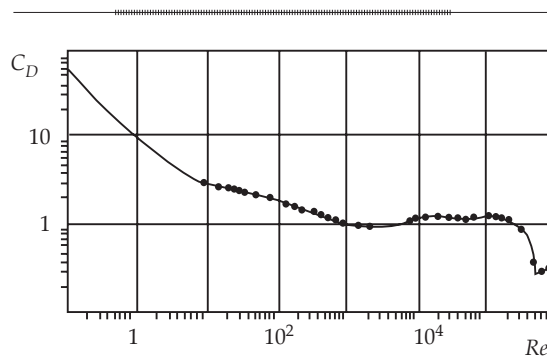


Figura 6. Relación  $C_D$ - $Re$  para un cilindro.

Para cada uno de los flujos, la relación  $C_D$ - $Re$  se obtiene en forma experimental. La figura 6 reproduce una gráfica que determina esta relación para el caso de un cilindro circular. Se puede observar que para un  $Re$  de aproximadamente  $4 \times 10^5$  existe una variación brusca en el coeficiente de arrastre.

Según investigaciones anteriores realizadas por el autor (Martínez-Austria, 1988), en la aplicación de la teoría de la catástrofe, el segundo parámetro de control suele ser un parámetro geométrico, así que se procedió a estudiar el efecto de la rugosidad.

Se ha demostrado (*i.e.* Daily y Harleman, 1975) que la reducción brusca del arrastre en cilindros se verifica debido a la transición de la capa límite de laminar a turbulenta, de manera que la ocurrencia de este fenómeno depende de la rugosidad del objeto, lo que confirma la pretensión de un segundo parámetro de control de tipo geométrico. La gráfica mencionada anteriormente es válida para cilindros lisos, pero se han realizado experimentos para establecer el efecto de esta variable en cilindros con rugosidad. La figura 7 reproduce los resultados obtenidos por Fage y Warsap (1930). Existen otras investigaciones que han empleado cilindros con rugosidad distribuida (Achenbach y Heinecke, 1981) con resultados similares.

Para el caso de flujo alrededor de esferas, en la figura 8 se muestran los resultados obtenidos por Achenbach (1972, 1973) para esferas lisas y rugosas. La reducción brusca observada en

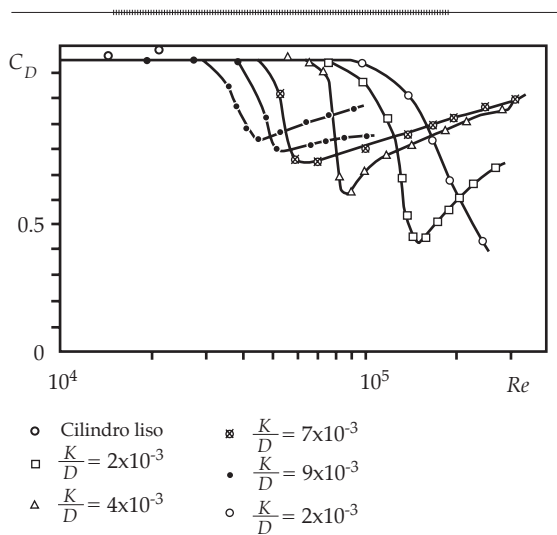


Figura 7. Relación  $C_D$ - $Re$  para un cilindro con rugosidad (Fage y Warsap, 1930).

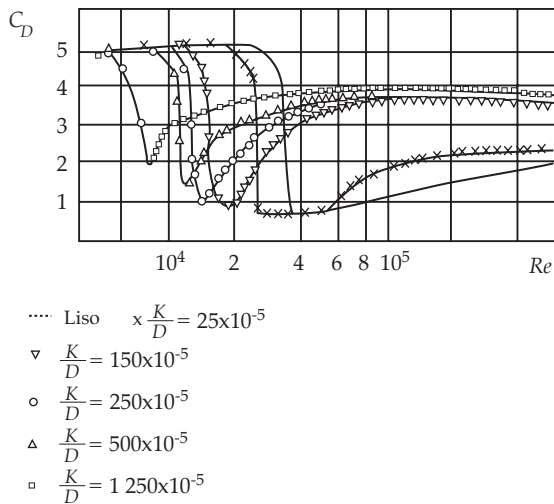


Figura 8. Relación  $C_D$ - $Re$  para esferas con rugosidad (Achenbach y Heinecke, 1981).

el coeficiente de arrastre se puede interpretar como un indicador de catástrofe.

La dificultad para hacer mediciones precisas en la zona de transición es una de las razones por las que la existencia de histéresis, por ejemplo, no se ha reportado. Por esta razón puede elaborarse la hipótesis de inexistencia de histéresis y bimodalidad, con lo que

permanece sólo un indicador de catástrofe (saltos bruscos). La relación funcional entre variables de flujo podría escribirse de la siguiente manera:

$$f(C_D, Re, \kappa/D) = 0 \quad (27)$$

esto es, el coeficiente de arrastre se puede considerar como una variable de estado, y el número de Reynolds y la rugosidad relativa como parámetros de control.

A la luz de estas consideraciones, y de acuerdo con los resultados de los experimentos mencionados anteriormente, se adopta la Convención de Maxwell, y los resultados de Fage y Warsap se pueden reinterpretar para formar una superficie de catástrofe, como se muestra en la figura 9, válida para cilindros circulares. De manera similar, con los resultados experimentales de Achenbach se obtiene la superficie de catástrofe para esferas mostrada en la figura 10.

Desde un punto de vista práctico, estas gráficas serían lo suficientemente precisas; sin embargo, debería ser posible establecer también la existencia de histéresis y bimodalidad. Shewe (1983) demostró la ocurrencia de estas características. Dicho autor empleó un túnel de viento presurizado, en el Göttingen Institut für Aeroelastik, Alemania, cuyas características le permitieron hacer observaciones de alta precisión. En primer lugar, debido a las dimensiones del túnel (60x60 cm en la sección de prueba), le fue posible trabajar con relaciones de bloqueo al interior del túnel de sólo 10%. En segundo término, debido a que contaba con la posibilidad de presurizar el túnel, le fue factible modificar el número de Reynolds sin afectar la velocidad del flujo, lo cual aumenta considerablemente las posibilidades de controlar la transición de la capa límite, al introducir un mínimo de perturbaciones.

Para medir presiones, incluyendo fluctuaciones inducidas en los cilindros, Shewe empleó una piezobalanza construida con celdas piezoeléctricas, conectada a amplificadores,

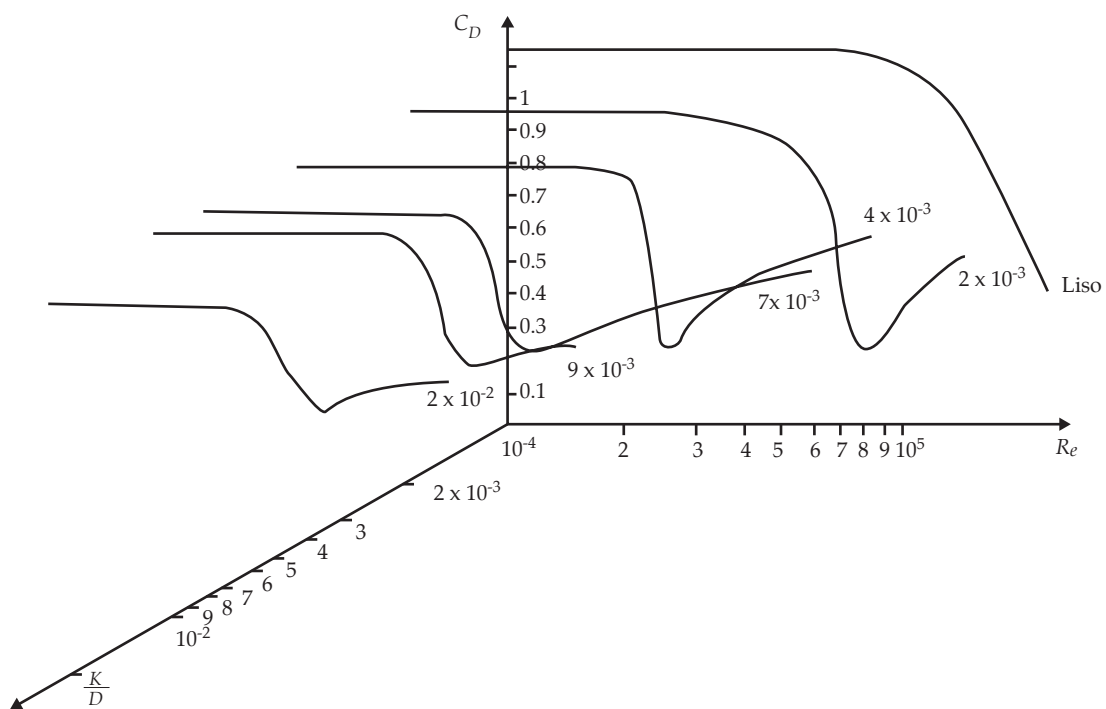


Figura 9. Relación  $C_D-Re$  representada como una superficie de catástrofe (Convención de Maxwell), cilindros.

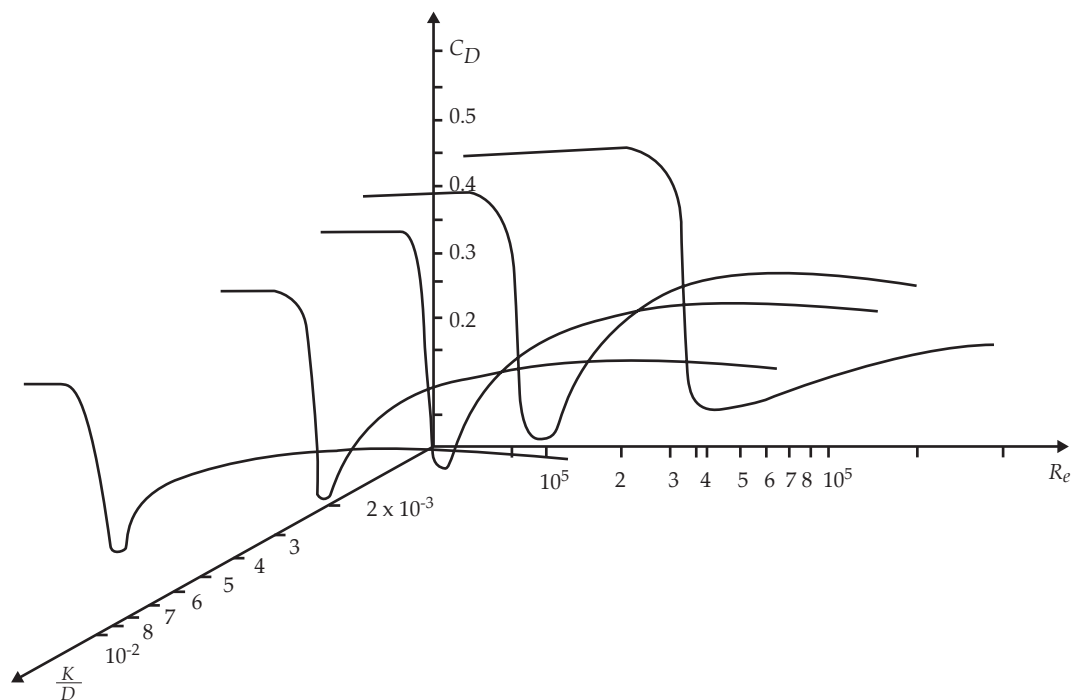


Figura 10. Relación  $C_D-Re-ks/d$  para esferas dibujadas como una superficie de catástrofe, Convención de Maxwell.

para evaluar la señal en un analizador y en una computadora digital.

La figura 11 reproduce algunos de los resultados obtenidos por Shewe. Se pueden observar dos zonas de histéresis y de bimodalidad, en el rango  $10^5 < Re < 10^6$ , que corresponde a la región de transición de la capa laminar límite a la capa turbulenta. Este comportamiento se observa en los coeficientes de arrastre y de apoyo, y en el número de Strouhal.

La existencia de dos rangos de histéresis, saltos bruscos y bimodalidad, se puede explicar fácilmente si se considera que en el primer salto se ha producido una separación turbulenta sólo en un lado del cilindro; y cuando ocurre la separación en el segundo, se obtendrá un segundo salto brusco, con dos puntos de separación turbulenta.

Shewe identifica como causa del comportamiento del fenómeno la inestabilidad

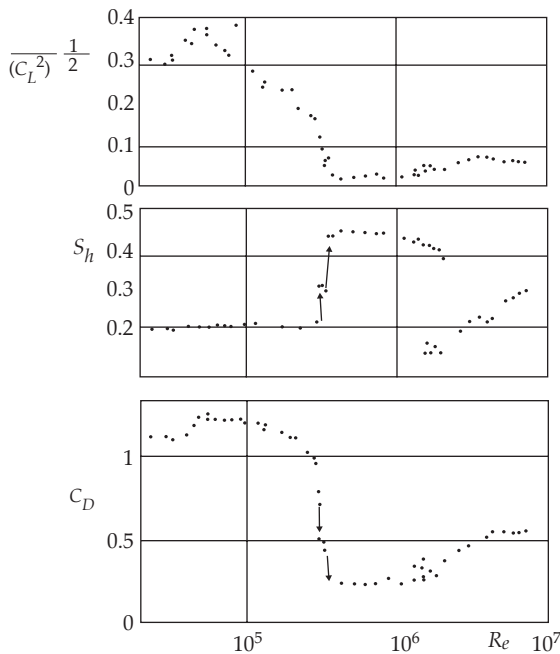


Figura 11. Variación del coeficiente de arrastre, número de Strouhal y media cuadrática del coeficiente de apoyo para un cilindro, en la zona de transición (Shewe, 1983).

hidrodinámica y lo interpreta como transiciones de fase entre los dos estados de orden, proponiendo diagramas de bifurcación.

Debe señalarse que estos rangos de histéresis son muy pequeños, incluso en condiciones experimentales bien controladas; de manera que en términos prácticos es conveniente emplear la Convención de Maxwell, como se mostró anteriormente.

## Conclusiones

Mediante la aplicación de la teoría de la catástrofe a los flujos irrotacionales, se ha demostrado analíticamente que el flujo alrededor de cilindros circulares con circulación es una catástrofe en pliegue.

Este resultado se ha ampliado, proponiendo que el flujo rotacional alrededor de cilindros y esferas también se puede modelar mediante la teoría de la catástrofe. Para ello, la rugosidad relativa se eligió como un segundo parámetro de control y, empleando resultados experimentales disponibles en la literatura, se demostró que ambos flujos pueden representarse como una geometría de catástrofe de tipo cúspide. Debido al pequeño rango de histéresis en estos flujos, se propuso como más conveniente la Convención de Maxwell para estos casos.

Con ambos resultados se puede formular la hipótesis de que los flujos alrededor de objetos sumergidos constituyen procesos de catástrofe y que este tipo de comportamiento debiera extenderse a cualquier tipo de geometría.

## Nomenclatura

$a$	Radio de cilindro.
$a_j$	Parámetros de control para una familia de funciones; $j=1, 2, 3, \dots, k$ .
$b, c, d$	Constantes.
$C_D$	Coficiente de arrastre total.
$C_{pb}$	Coficiente de presión base.
$d$	Ancho de estela.
$\det$	Determinante de la matriz.
$\text{grad}$	Gradiente de una función.

$f:R^n \rightarrow R$	Función de $n$ variables.
$f:R^n \times R^k \rightarrow R$	Familia de funciones con $n$ variables y $k$ parámetros.
$Hf, H\phi$	Matriz de estabilidad o hessiana de la función $f$ y $\phi$ .
$L$	Longitud característica.
$n, l$	Exponentes y constantes.
rot	Rotacional de una función.
$Re$	Número de Reynolds.
$Sh$	Número de Strouhal.
$V, U$	Velocidad de flujo uniforme.
$V_s$	Velocidad media de un flujo.
$u, v, w$	Componentes del vector $v$ , en relación con $x, y, z$ , respectivamente.
$x_i$	Variables de una familia de funciones; $i=1, 2, 3, \dots, n$ .
$x, y, z$	Coordenadas en un sistema de ejes tridimensional.
$\bar{V}$	Vector de velocidad con componentes $u, v, w$ in $x, y, z$ , respectivamente.
$\phi$	Función potencial, de manera tal que $v = \text{grad } \phi$ .
$\Gamma$	Circulación.
$k/D$	Rugosidad relativa.
$\lambda$	Coefficiente de una forma cuadrática, autovalores ( <i>eigenvalores</i> ) de la matriz de estabilidad.
$\nu$	Viscosidad cinemática del fluido.
$\rho$	Punto crítico de una función.
$\nabla$	Operador matemático.
$/_p$	Denota "evaluado en el punto $p$ ".

Recibido: 01/11/2009  
Aprobado: 30/11/2009

## Referencias

- ACHENBACH, E. and HEINECKE, E. On vortex shedding from smooth and rough cylinders in the range of Reynolds numbers  $6 \times 10^3$  to  $5 \times 10^6$ . *Journal of Fluid Mechanics*. Vol. 109, 1981, pp. 239-251.
- ACHENBACH, E. Experiments of flow past spheres at very high Reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*. Vol. 54, Part 3, 1972, pp. 565-575.
- ACHENBACH, E. The effects of surface roughness and tunnel blockage on the flow past spheres. *Journal of Fluid Mechanics*. Vol. 65, Part 1, 1973, pp. 113-125.
- BIRKHOFF, G. *Hydrodynamics: a study in logic, fact and similitude*. Princeton: Princeton University Press, 1950.
- CUI, P., THORES, J. and JUNWEI, G. *Study on the properties of Debris flow initiation by means of catastrophe theory*. Internationales Symposium Interpret, Garnish-Partenkirchen, Germany, 1996, pp. 103-112.
- DAILY, J.W. y HARLEMAN, D.R. *Dinámica de los fluidos*. México, D.F.: Trillas, 1975.
- FAGE, A. and WARSAP, J.E. *The effect of turbulence and surface roughness on the drag of a circular cylinder*. Aero. Res. Council, London, R&M, no. 1283, 1930.
- KERNA, CH. and SURENDER, K. *Application of stochastic catastrophe theory to reservoir management* International conference on Interdisciplinary Mathematical and Statistical Techniques, May, 23-26, Czech Republic, 2009.
- MARTÍNEZ-AUSTRIA, P. *Procesos de catástrofe en hidráulica*. Jiutepec, México: Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, 1988, 330 pp.
- MORSE, M. The critical points of a function of  $n$  variables. *Trans. American Mathematical Society*. Vol. 33, 1931, pp. 72-91.
- SHEWE, G. On the force fluctuations acting on a circular cylinder in cross flow from subcritical up to transcritical Reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*. Vol. 133, 1983, pp. 265-285.
- THOM, R. *Structural stability and morphogenesis*. New York: Benjamin-Addison Wesley, 1974. Traducido del francés *Stabilité Structurelle et morphogénese*, 1972.

## Abstract

MARTÍNEZ-AUSTRIA, P.F. *Catastrophe models for the flow around immersed bodies*. Water Technology and Sciences, formerly Hydraulic Engineering in Mexico (in Spanish). Vol. I, no. 1, January-March, 2010, pp. 7-19.

*In fluid mechanics there are several phenomena that exhibit a hysteretic behavior and sudden changes not only of a quantitative, but also a qualitative nature. Such phenomena can be represented and explained by the catastrophe theory, which explains this kind of behavior observed in some physical systems. This article offers an analytical demonstration that the flow around immersed cylinders is a fold catastrophe. Extending this result, now with a semi-empirical approach, it can be shown that flow around cylinders and spheres with roughness can be represented using a cusp catastrophe geometry. Both results support the hypothesis that the flow around objects immersed in liquids can be modeled through catastrophe geometries and hence explain the occurrence of bifurcation, bimodality, sudden jumps and hysteresis.*

**Keywords:** *catastrophe theory applications, catastrophe theory, flow around immersed bodies, hysteresis in fluid mechanics, fluid mechanics, cusp catastrophe.*

## Dirección institucional del autor

*Dr. Polioptro F. Martínez-Austria*

Director general  
Instituto Mexicano de Tecnología del Agua  
Paseo Cuauhnáhuac 8532, colonia Progreso  
62550 Jiutepec, Morelos, México  
teléfono: + (52) (777) 3293 600, extensión 554  
fax: + 52 (777) 3193 422  
polioptro@tlaloc.imta.mx